

Universidad Abierta y  
Nacional a Distancia



**FACULTAD DE CIENCIAS  
BASICAS E INGENIERIA**

**MATEMATICAS BASICAS  
CURSO NIVELATORIO  
SEMINARIO DE INDUCCION UNADISTA**

**ARACELLY MAHECHA DE HERNANDEZ  
JORGE ELIECER RONDON DURAN**

**BOGOTA, D.C. 2004**

Universidad Abierta y  
Nacional a Distancia



© Editorial UNAD, 2004

*Primera edición 2004*

*Prohibida la reproducción parcial o  
total de esta obra sin autorización de  
la Universidad Nacional Abierta y a  
Distancia UNAD*

*La edición de este módulo estuvo a  
cargo de la Facultad de Ciencias  
Básicas e Ingeniería*

**Decano**

*José Humberto Guerrero R.*

*Alvaro Cisneros R.*

**Interventor**

*Alcira Casas Borja*

**Coordinador Editorial Facultad**

*Esther Julia León L.*

**Diagramación**

*Bogotá, D.C. 2004*

# Contenido

---

INTRODUCCION.....	7
1. Aritmética.....	9
Autoevaluación inicial.....	11
1.1 Conjuntos.....	15
1.1.1 Operaciones entre conjuntos.....	18
1.2 Números.....	24
1.2.1 Números naturales.....	25
1.2.2 Números enteros.....	26
1.2.3 Números racionales.....	26
1.2.4 Números reales.....	47
Autoevaluación 1. Potenciación.....	57
Autoevaluación 2. Radicación.....	62
Autoevaluación 3. Logaritmación.....	67
1.2.5 Los números complejos.....	68
Autoevaluación 4. Números complejos.....	72

2.	Algebra.....	73
	Autoevaluación inicial.....	75
2.1	Expresiones algebraicas.....	77
2.2	Adición de expresiones algebraicas.....	79
2.3	Signos de agrupación.....	83
2.4	Multiplicación.....	89
2.5	División.....	94
2.6	Productos notables.....	102
	2.6.1 Binomios.....	102
	2.6.2 Productos de la suma por la diferencia de dos cantidades.....	111
	2.6.3 Producto de dos binomios.....	113
	Autoevaluación 5. Productos notables.....	116
2.7	Cocientes notables.....	117
2.8	Factorización.....	121
	2.8.1 Factor común.....	121
	2.8.2 Diferencia de cuadrados perfectos.....	128
	2.8.3 Trinomios.....	129
	Trinomio cuadrado perfecto.....	129
	Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ .....	133
	Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ .....	137
	2.8.4 Suma o diferencia de cubos perfectos.....	141
	Autoevaluación 6.....	142
2.9	Máximo común divisor.....	143
	Autoevaluación 7. ....	151
2.10	Fracciones algebraicas.....	152
2.11	Operaciones con fracciones.....	155
	Autoevaluación 8.....	164

3.	Razones y proporciones.....	165
3.1	Razones.....	167
3.1.1	Razones aritméticas.....	167
3.1.2	Razón geométrica.....	167
3.2	Proporciones.....	168
	Autoevaluación 9.....	172
3.3	Reparto proporcional.....	174
3.3.1	Reparto proporcional directo simple.....	174
3.3.2	Reparto proporcional directo compuesto.....	190
3.3.3	Reaprtto proporcional inverso simple.....	193
	Autoevaluación 10. ....	197
3.4	Porcentaje (%).....	198
	Autoevalación 11. ....	203
4.	Geometría.....	205
4.1	Geometría plana.....	209
4.1.1	El triángulo.....	220
4.1.2	El cuadrilátero.....	227
4.1.3	La circunferencia y el círculo.....	229
	Autoevaluación 12.....	233
4.2	Geometría espacial.....	235
4.2.1	Diedros.....	235
4.2.2	Poliedros.....	236
	Autoevaluación 13.....	244
	Informaciones de retorno.....	245
	Bibliografía.....	275



**E**l proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas ha sido complicado para el estudiante, ya que durante toda su vida se le ha sembrado temor hacia ellas, generando con esto su rechazo y desmotivación para aprenderlas.

La falta de interés hacia esta asignatura puede deberse al enfoque que se le ha dado, que por ser abstracto poco se relaciona con problemas de la vida cotidiana. Sin embargo, estudiar las matemáticas es como revivir las formas de organizar los pensamientos que han utilizado nuestros ancestros. El Algebra, por ejemplo, es una versión moderna de formas de pensar y es el primer gran paso para generalizar procesos matemáticos, lo cual contribuye a la solución de problemas complejos que anteriormente implicaban procesos largos y desgastantes.

En vista de la importancia que tiene esta asignatura y del tipo de estudiantes que ingresan a la UNAD, personas que generalmente hace tiempo terminaron sus estudios secundarios, razón por la cual ya se les han olvidado aspectos que necesariamente deben tener claros para abordar sus estudios superiores, se pensó en la necesidad de realizar un material que contribuya a solucionar esta falencia.

Este material se diseñó pensando en el modelo a distancia, donde el estudiante es el agente activo de su propio aprendizaje, motivo por el cual la responsabilidad del aprendizaje es únicamente de él. Para lograr esto, se proponen algunas autoevaluaciones iniciales con el fin de llevar al estudiante a reflexionar sobre qué tanto sabe de la temática que se va a

estudiar y motivarlo para que estudie con sentido, es decir, se cuestione cómo puede aprender los diferentes temas. También se presentan ejercicios resueltos para ir guiando su proceso de aprendizaje y se proponen evaluaciones finales de cada capítulo, para que el estudiante verifique qué aprendió y si le quedan dudas pueda consultar las informaciones de retorno de cada una de estas evaluaciones y si estas persisten debe acudir al tutor.

Las temáticas que se abordan en este escrito se distribuyen en cuatro capítulos:

- Capítulo 1 Aritmética: se tratan aspectos relacionados con los conjuntos y con los diferentes tipos de números como los Naturales, Enteros, Racionales, Reales y todas las operaciones que se pueden realizar con cada uno de esta clase de números.
- Capítulo 2. Algebra: se estudian las diferentes operaciones algebraicas como suma, resta, multiplicación, división, productos notables, factorización y operaciones con fracciones algebraicas.
- Capítulo 3. Razones y proporciones: se analizan las razones aritmética y geométrica, las proporciones, el reparto proporcional: directas, directo simple, directo compuesto, inverso simple e inverso compuesto. También se plantean algunos problemas utilizando la regla de tres.
- Capítulo 4. Geometría: se hace un corto repaso sobre las diferentes figuras planas, se calculan sus áreas y sus perímetros, también se abordan las figuras espaciales y se calculan sus volúmenes.

Para realizar el estudio, es importante tener a la mano papel y lápiz para ir desarrollando los ejercicios que se proponen en este módulo y con esto lograr un aprendizaje más significativo.

# CAPITULO

# 1

# Aritmética

## Contenido

Autoevaluación inicial

1.1 Conjuntos

1.2 Números



# AUTOEVALUACIÓN INICIAL

Con el fin de hacer un diagnóstico sobre el conocimiento que usted tiene sobre las temáticas relacionadas con la aritmética, a continuación lo invitamos para que resuelva la siguiente evaluación. Con este ejercicio, se pretende que haga una reflexión sobre lo que conoce acerca de esta temática y lo que quisiera aprender.

En caso que sienta que no puede contestar esta evaluación, no se preocupe que al abordar la temática encontrará respuesta a todas sus inquietudes. Por eso es importante que al terminar el capítulo vuelva a resolver esta evaluación y nuevamente haga una reflexión sobre lo que aprendió.

1. Sean los conjuntos:

$$A = \{x / x \text{ es un número entero entre } 5 \text{ y } 10\}$$

$$B = \{x / x \text{ es un número entero entre } 4 \text{ y } 8\}$$

Hallar:  $A \cup B$ ,  $A \cap B$

2. Defina con sus propias palabras números: naturales, enteros, racionales y reales. Dé un ejemplo de cada uno de estos tipos de números.

Hallar el resultado de:

$$3. \frac{9}{2} + \frac{7}{2} - \frac{11}{2}$$

4.  $\frac{5}{3} - \frac{7}{9} + 4$

5.  $3\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}$

6.  $\frac{6}{5} \div \frac{1}{9}$

7. Calcular los  $\frac{3}{8}$  de 16.000

Hallar:

8.  $5^2 \cdot 5^7 \cdot 5$

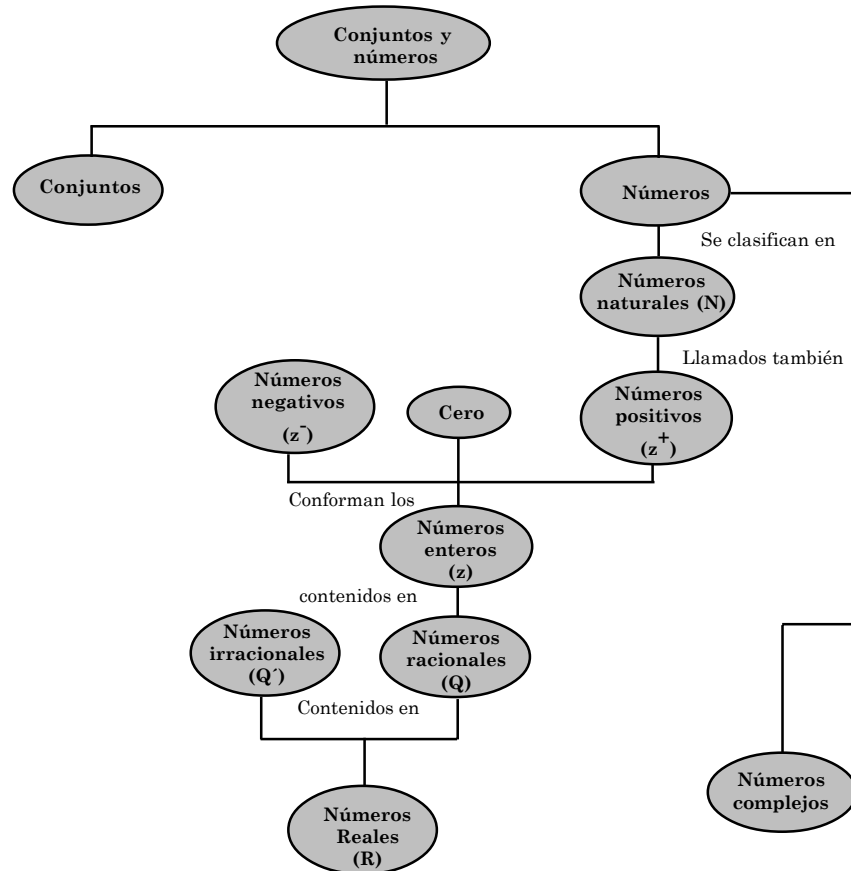
10.  $\left(\left((9^2)^3\right)^4\right)^0$

11.  $2^{-6}$

12.  $\sqrt[3]{1331}$

13.  $\log_5 625$

## Conjuntos y números



Para abordar las temáticas de aritmética, álgebra y geometría, es necesario tener muy claros los conceptos básicos sobre las diferentes operaciones que se pueden realizar con los conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales.



Los conjuntos se pueden comparar como una colección o lista de objetos que comparten una cierta característica que los diferencia de otros. Los conjuntos están conformados por un grupo de objetos llamados elementos. Se pueden enumerar de dos formas:

- ➔ Por **extensión** cuando se detallan todos los integrantes, por ejemplo el conjunto de vocales del alfabeto castellano:

$$N = \{ a, e, i, o, u \}$$

Esto significa que el conjunto  $N$  está compuesto por los elementos **a, e, i, o, u** exclusivamente. En este caso se puede decir que el elemento **a** pertenece al conjunto  $N$ ; o diciéndolo matemáticamente: " $a \in N$ ". Entonces el **símbolo  $\in$**  significa **pertenencia**.

Análogamente se podría decir que:  $g \notin N$ , o sea que "el elemento **g** no pertenece al conjunto  $N$ ". El **símbolo  $\notin$**  indica **no pertenencia**.

- ➔ Otra forma de enumerar los conjuntos es por **comprensión**, donde se diferencia un conjunto de otro por la característica única que agrupa sus elementos. En este caso la característica sería:

$$N = \{ x / x \text{ es una vocal del alfabeto castellano} \}$$

Se lee:  $N$  es el conjunto de los elementos equis tales que (o que cumplen la condición que) equis es una vocal del alfabeto castellano.

Cuando un conjunto tiene un número infinito de elementos (se llama conjunto infinito) no se pueden contar, es imposible describirlo por extensión, razón por la cual se hace necesario hacerlo por comprensión, por ejemplo el conjunto de los números racionales.

# Ejercicios

## resueltos

1. Supongamos el conjunto que descrito por comprensión es:

$$P = \{x / x \text{ es un número impar menor que } 20\}$$

Esto equivale al conjunto de elementos  $x$  que cumplen la condición de ser números impares menores que veinte.

Entonces para nombrar este conjunto por extensión sería:

$$P = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}.$$

Se podría decir que  $9 \in P$ , pero  $8 \notin P$

**A** Para nombrar los conjuntos siempre se usan las letras mayúsculas, en este caso **P**, mientras que los elementos se denotan con letras minúsculas.

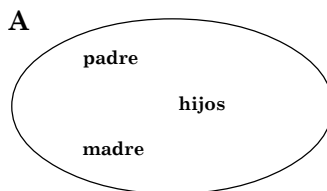
2. Si se tiene el conjunto  $M = \{\text{padre, madre, hijos}\}$ , por comprensión sería:

$$M = \{x / x \text{ es un miembro de la familia}\}$$

### 1.1.1 Operaciones entre conjuntos

Ya se tiene conocimiento sobre cómo nombrar los conjuntos, ahora es importante recordar las diferentes operaciones que se pueden realizar con los conjuntos. Para facilitar este proceso, se acude a los diagramas de Venn-Euler, mediante el cual se puede dar una idea más clara de los conjuntos.

El conjunto M anteriormente mencionado se puede representar en el diagrama de Venn-Euler de la siguiente manera:



Antes de iniciar con las diferentes operaciones que se realizan con los conjuntos, es importante recordar las **comparaciones** entre conjuntos:

➡ **Un conjunto es igual a otro** cuando tienen los mismos elementos, por ejemplo los conjuntos:

$$A = \{ 1,3,5 \} \text{ y}$$

$$B = \{ 5,3,1 \},$$

Se dice que  $A = B$ , porque tienen los mismos elementos, sin importar el orden de los elementos.

Por otro lado, se puede decir que  $\{1,3,5,3,1\} = \{1,3,5,5,3\}$  porque tienen los mismos elementos, aunque se repitan algunos de sus elementos.

➡ **Contenencia:** dados los conjuntos:

$$M = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\} \text{ y}$$

$$N = \{a,e,i,o,u\}$$

Se aprecia que todos los elementos del conjunto **N** están también dentro del conjunto **M**, entonces se dice que **N** es un subconjunto de **M** o también que **N** está contenido en **M** y se denota como:  $N \subset M$

En el caso de los conjuntos:

$$A = \{1,3,5\}$$

$$B = \{5,3,1\}$$

Se puede decir que  $A \subset B$  y  $B \subset A$ , entonces se llega a la conclusión que si dos conjuntos son iguales cada uno es subconjunto del otro.

➡ **Suma:** la más sencilla de las operaciones entre conjuntos es la **adición o unión**, a través de la cual se obtiene un nuevo conjunto con los elementos de cada uno de los conjuntos que se están uniendo. Esta operación se representa con el operador  $\cup$ .

Si se tienen los conjuntos:

$$A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$$

$$B = \{a,e,i,o,u\},$$

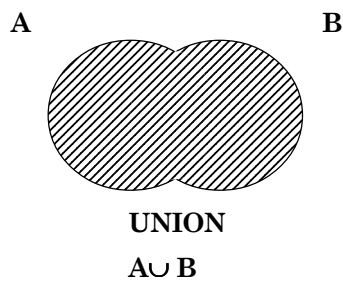
La suma de estos dos conjuntos es:

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,i,o,u\}$$

En la adición o unión de conjuntos, el conjunto resultado es igual a los elementos comunes y no comunes.

Los elementos comunes, en este caso a, e, i, solamente se colocan una vez.

A través del diagrama de Venn la suma se representa de la siguiente manera:



➡ **Intersección:**

**A** La intersección de dos o más conjuntos es el grupo de los elementos que son comunes a tales conjuntos.

Esta operación se representa por el símbolo  $\cap$

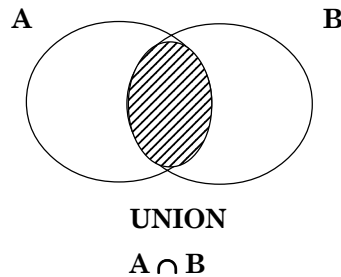
Siguiendo con el ejemplo anterior,  $A = \{ a,b,c,d,e,f,g \}$  y

$B = \{ a, e, i, o, u \}$ , intersección es igual a:

$$A \cap B = \{ a, e \}$$

Por que los elementos **a,e** se encuentran en los dos conjuntos.

Mediante diagramas de Venn la operación de **intersección** se representa así:



**Existe un conjunto llamado Universal (U).** Este representa el total de elementos que pueden componer un conjunto.

Por ejemplo si se tienen los conjuntos

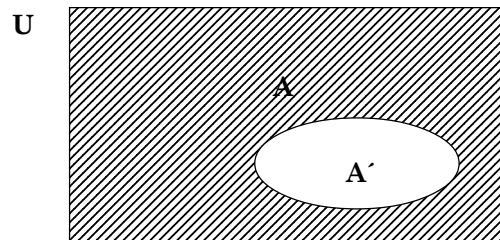
$$U = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z \} \text{ y}$$

$$A = \{ a, e, i, o, u \},$$

El **conjunto complemento de A** denominado **A'** (A prima) equivale al conjunto de elementos que pertenecen al conjunto **Universal** y que no pertenecen al conjunto **A**, entonces:

$$A' = \{ b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z \}$$

El conjunto Universal se representa por un rectángulo en el diagrama de Venn, dentro del cual están todos los subconjuntos:



➔ **Conjunto vacío:** se refiere al conjunto que no contiene elementos y se representa mediante la letra griega  $\phi$ , y por extensión se representa así: {}, sin elementos, por ejemplo si:

$M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  y  $N = \{2, 4, 6, 8\}$  la intersección es:

$M \cap N = \phi$  porque los dos conjuntos no tienen elementos comunes.

# Ejercicios

## resueltos

Sean los conjuntos:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\}$$

$$Z = \{4, 6, 8\}$$

Hallar:  $(X \cup Y)$ ;  $(Y \cup Z)$ ;  $(Z \cup X)$ ;  $(X \cap Y)$ ;  $(Y \cap Z)$ ;  $(Z \cap X)$ ;  $Y'$

$$(X \cup Y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(Y \cup Z) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

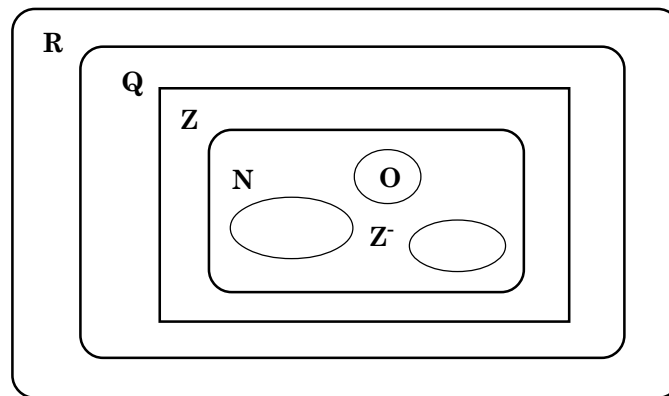
$$(Z \cup X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$(Y \cap Z) = \emptyset \text{ porque no tienen elementos comunes}$$

$$(Z \cap X) = \{4\}$$

$Y' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  (o sea que  $Y'$  es igual a los elementos que están en  $U$  pero no están en  $Y$ ),

**A**l considerarse los conjuntos como una colección de elementos con cierta característica que lo diferencian de los demás, los diferentes grupos numéricos: Reales, Racionales, Enteros y Naturales son catalogados como conjuntos, de tal manera que pueden representarse mediante el diagrama de Venn.



Donde:

**N** representa los números **Naturales**

**Z** los números **Enteros**

**Q** números **Racionales**

**R** números **Reales**

En este diagrama se representa  $N \subset Z \subset Q \subset R$  (el conjunto de los números **Naturales** están contenidos en los **Enteros** y a su vez, el conjunto de los **Enteros** están contenidos en los **Racionales** y estos últimos están contenidos en los **Reales**).

A continuación se definirán cada uno de estos tipos de números, empezando por los Naturales.

### 1.2.1 Números naturales

Matemáticamente se denota al conjunto de los números naturales con la letra  $\mathbb{N}$ , tal que:

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

Con estos números se pueden realizar operaciones como suma, multiplicación y potenciación.

Los números Naturales tiene como subconjuntos los números pares, impares y primos.

#### Números pares:

Se refiere a los números que son divisibles por dos  $\mathbb{2}$ , es decir que se pueden dividir exactamente por  $\mathbb{2}$ , ejemplo 2, 4, 6, 8, 10, 12, .....

#### Números impares:

Son los números que son indivisibles por 2, es decir que no se pueden dividir por 2, ejemplo 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, .....

### Números primos:

Se dice que un número es primo si no tiene más divisores que él mismo y la unidad, ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ..... ya que:

2 únicamente se puede dividir por sí mismo  $2 \div 2 = 1$  y por la unidad  $2 \div 1 = 2$ , es decir no se puede dividir por ningún otro número.

$29 \div 29 = 1$  y  $29 \div 1 = 29$  no hay ningún otro número que divida exactamente a este número.

$41 \div 41 = 1$  y  $41 \div 1 = 41$  no hay ningún otro número que divida exactamente a este número.

Es importante observar que el único **número par primo** es el 2

### 1.2.2 Números enteros

Existe otro tipo de números, los **Enteros (Z)**. Este conjunto de números está compuesto por los **enteros positivos (Z<sup>+</sup>)** (que son los mismos Naturales), por los **enteros negativos (Z<sup>-</sup>)** y por el **cero (0)**. Con los números enteros se pueden realizar las mismas operaciones planteadas en los Naturales más la resta.

### 1.2.3 Números racionales

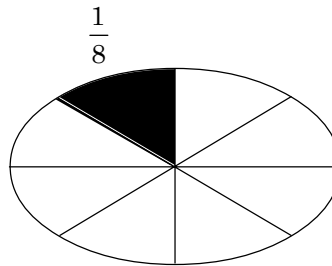
A los números racionales se le conoce como el conjunto **Q**, está conformado por el cociente de números enteros. Todos los enteros pueden ser escritos como números racionales divididos por uno (1), ejemplo  $\frac{9}{1}, \frac{-7}{1}$ , es decir que

$$\boxed{N \subset Z \subset Q}$$

## Números fraccionarios:

En diversas situaciones de la vida cotidiana es necesario trabajar con trozos de cosas como por ejemplo media manzana, medio kilo de harina, un cuarto de arroba de papa, y un cuarto de terreno de un lote, entre otras, estos son los Números Fraccionarios.

Ejemplo, la siguiente figura se dividió en ocho (8) partes y se tomó una Parte (la sombreada) esto equivale a decir:  $\frac{1}{8}$  donde el (1) representa al **numerador** (o sea las partes que se toman) y el ocho (8) el **denominador** (las partes en que está dividida la unidad).



Otro ejemplo de un número fraccionario es cuando una chocolatina se divide en cinco (5) partes, **denominador** y se seleccionan 2 de estas porciones, **numerador**; este fraccionario se representa de la siguiente forma:

**Numerador:**  
Indica el número de partes que se toman

$\frac{2}{5}$

**Denominador:**  
Indica las partes en que está dividida la unidad. No puede ser cero (0)

**1.2.3.1 Suma y resta de fraccionarios:** si se tiene la siguiente suma de números fraccionarios:

$$\frac{7}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7+5+1}{3} = \frac{13}{3}$$

▲ ▲ ▲  
Denominadores  
iguales

Se observa que todos los denominadores tienen el mismo número (**3**) o sea que las fracciones son **homogéneas**. Para la suma y resta de este tipo de fracciones se deja el mismo denominador (3) y se suman o restan los numeradores, de acuerdo con la operación planteada.

### Ejemplos:

$$\frac{4}{7} - \frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4-3+1}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{9}{8} - \frac{11}{8} = \frac{3+5+9-11}{8} = \frac{6}{8}$$

Existe otro tipo de fraccionarios, son los que tienen los denominadores diferentes. Este tipo de fraccionarios se denominan **No Homogéneos**. Para llevar a cabo las operaciones de suma o resta de fraccionarios no homogéneos se debe primero hallar un denominador común para todas las fracciones y luego si realizar la operación de suma y resta de los numeradores. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{8}{3} + \frac{7}{5} + \frac{5}{6}$$

▲ ▲ ▲  
Denominadores  
diferentes

Como se trata de fraccionarios no homogéneos porque sus denominadores son diferentes **3, 5 y 6**, se procede a hallar un denominador común, que divida exactamente a los tres denominadores.

**A** Una manera fácil para hallar el denominador común, es a través del mínimo común múltiplo m.c.m. el cual consiste en **Dividir cada uno de los números dados por su menor divisor y continuar con los cocientes hasta que todos los cocientes sean uno (1).**

**El m.c.m. es el producto de todos los divisores primos.**

3	5	6	2	→	Al analizar los denominadores 3, 5 y 6 podemos darnos cuenta que el menor divisor de estos tres números es 2, por lo tanto se divide el 6 por este número dando como resultado 3. Los otros números 3 y 5 como no son divisibles por 2 se dejan igual. Por esta razón en la segunda fila aparecen 3, 5 y 3, la cual se divide por 3 dando como resultado 1, 5 y 1, la cual a su vez se divide por 5 hasta llegar a 1, 1 y 1.
3	5	3	3		
1	5	1	5		
1	1	1			

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

El m.c.m. se obtiene al multiplicar cada uno de los divisores primos 2.3.5 dando como resultado 30. Esto significa que 30 es el menor múltiplo de 3, 5 y 6 por tal razón, divide exactamente a estos números.

## Repasemos

La multiplicación puede ser representada por: el signo (x), por un punto (●) o por un par de paréntesis ( ) ( )

El m.c.m, (30) se deja como el denominador común para todas las fracciones. Para hallar cada uno de los términos del numerador se procede de la siguiente manera: **el mcm se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones dadas (3,5,6) y se multiplican por sus respectivos numeradores.**

$$\frac{8}{3} + \frac{7}{5} + \frac{5}{6} = \frac{(30 \div 3).8 + (30 \div 5).7 + (30 \div 6).5}{30} = \frac{80 + 42 + 25}{30} = \frac{149}{30}$$

# Ejercicios

## resueltos

1. Operar:

$$\frac{7}{5} + \frac{8}{15} + \frac{11}{60}$$

Como los denominadores son diferentes, se halla el denominador común:

5	15	60		2
5	15	30		2
5	15	15		3
5	5	5		5
1	1	1		

m.c.m = 2.2.3.5 = 60

Entonces el denominador común es (60). Para encontrar los términos del numerador respectivo se divide 60 entre cada uno de los denominadores de las fracciones y se multiplican por sus respectivos numeradores.

$$\frac{7}{5} + \frac{8}{15} + \frac{11}{60} = \frac{(60 \div 5).7 + (60 \div 15).8 + (60 \div 60).11}{60} = \frac{84 + 32 + 11}{60} = \frac{127}{60}$$

$$2. \quad \frac{31}{6} - \frac{25}{8}$$

el m.c.m de 6 y 8:

6	8		2
3	4		2
3	2		2
3	1		3
1	1		

**m.c.m =  $2^3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$**

El m.c.m. se deja como denominador común y los términos del numerador se forman dividiendo el 24 entre cada uno de los denominadores de las fracciones y multiplicándolos por los respectivos numeradores. La única diferencia entre la suma y la resta es que los términos del numerador se restan o se suman de acuerdo con la operación planteada.

$$\frac{31}{6} - \frac{25}{8} = \frac{(24 \div 6) \cdot 31 - (24 \div 8) \cdot 25}{24} = \frac{124 - 75}{24} = \frac{49}{24}$$

$$3. \quad \frac{7}{20} + \frac{49}{16} + \frac{11}{5}$$

20	16	5	2
10	8	5	2
5	4	5	2
5	2	5	2
5	1	5	5
1	1	1	

**m.c.m = 2<sup>4</sup> · 5 = 2.2.2.2.5 = 80**

$$\frac{7}{20} + \frac{49}{16} + \frac{11}{5} = \frac{(80 \div 20) \cdot 7 + (80 \div 16) \cdot 49 - (80 \div 5) \cdot 11}{80} = \frac{28 + 245 - 176}{80} = \frac{97}{80}$$

4.  $9 - \frac{31}{6} + \frac{49}{12}$

Recordando que todo número entero se puede convertir en Racional si se le coloca como denominador el número **uno (1)**, la operación se plantea así:

$$\frac{9}{1} - \frac{31}{6} + \frac{49}{12}$$

1	6	12	2
1	3	6	2
1	3	3	3
1	1	1	

**m.c.m = 2<sup>2</sup> · 3 = 2.2.3 = 12**

$$\frac{9}{1} - \frac{31}{6} + \frac{49}{12} = \frac{(12 \div 1) \cdot 9 - (12 \div 6) \cdot 31 + (12 \div 12) \cdot 49}{12} = \frac{108 - 62 + 49}{12} = \frac{95}{12}$$

$$5. \quad 6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} - 1$$

Para poder realizar esta operación se tienen que convertir los números enteros a Racionales quedando de la siguiente manera:

$$\frac{6}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1}$$

1	2	3	1	2	1	2
1	1	3	1	1	1	3
1	1	1	1	1	1	

**m.c.m = 2 · 3 = 6**

$$\frac{6}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{(6 \div 1) \cdot 6 - (6 \div 2) \cdot 1 + (6 \div 3) \cdot 1 - (6 \div 1) \cdot 2 + (6 \div 2) \cdot 1 - (6 \div 1) \cdot 1}{6} =$$

$$5 + 4\frac{7}{8} + \frac{1}{3}$$

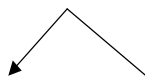
$$\frac{36 - 3 + 2 - 12 + 3 - 6}{6} = \frac{20 \div 2}{6 \div 2} = \frac{10}{3}$$

---

Recordando la simplificación de fracciones, la cual consiste en dividir tanto el numerador como el denominador por un mismo número, en este caso el número (2).

---

6. Operar los siguientes números racionales:




---

Este número se denomina **Mixto** porque consta de una parte entera (4) y un número fraccionario (7/8). Para poder desarrollar la operación es necesario convertir este mixto en número fraccionario. Esto se logra multiplicando el denominador de la fracción (8) por el número entero (4) y a este resultado se le suma el numerador de la fracción (7). El resultado de esta operación  $8 \times 4 + 7 = 39$  se deja como numerador de la nueva fracción y como denominador se deja el que tiene la fracción o sea (8).

---

Una vez hecha la conversión del Mixto a racional, queda:

1	8	3	2
1	4	3	2
1	2	3	2
1	1	3	3
1	1	1	

**m.c.m =  $2^3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$**

$$\frac{5}{1} + \frac{39}{8} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{1} + \frac{39}{8} + \frac{1}{3} = \frac{(24 \div 1)5 - (24 \div 8)39 + (24 \div 3)1}{24} = \frac{120 + 117 + 8}{24} = \frac{245}{24}$$

### 1.2.3.2 Multiplicación de racionales

#### Ejemplo:

$$\frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15} \leftarrow$$

Para multiplicar dos o más fracciones, se multiplican los numeradores entre sí, en este caso  $(4 \times 7) = 28$  y los denominadores también se multiplican entre sí  $(5 \times 3) = 15$

7. Realizar:

$$\frac{7}{8} \times \frac{16}{21} = \frac{112}{168} = \frac{112 \div 2}{168 \div 2} = \frac{56}{84} = \frac{56 \div 2}{84 \div 2} = \frac{28}{42} = \frac{28 \div 2}{42 \div 2} = \frac{14}{21} = \frac{14 \div 7}{21 \div 7} = \frac{2}{3}$$

En este ejercicio se observa que al multiplicar los numeradores  $(7 \times 16)$  el resultado es 112 y al multiplicar los denominadores  $(8 \times 21)$  el resultado es 168. Pero tanto el numerador como el denominador son divisibles por (2), es decir se pueden dividir por (2), entonces se dividen por este número, dando como resultado  $56/84$ , estos a su vez se pueden dividir por (2) dando como resultado  $28/42$  y así se sigue dividiendo sucesivamente hasta cuando ya no se puedan dividir por ningún otro número, es decir obtener una fracción irreducible.

8.

$$\frac{5}{6} \times \frac{9}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{5 \times 9 \times 7}{6 \times 7 \times 3} = \frac{315}{126} = \frac{315 \div 3}{126 \div 3} = \frac{105}{42} = \frac{105 \div 3}{42 \div 3} = \frac{35}{14} = \frac{35 \div 7}{14 \div 7} = \frac{5}{2}$$

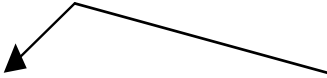
Es importante recordar algunas reglas de la divisibilidad:

- Un número es divisible por 2 cuando termina en número par o en cero.

- Un número es divisible por 3 cuando al sumar las cifras que conforman el número da un múltiplo de 3. Ejemplo 315 es divisible por 3 porque al sumar  $3 + 1 + 5 = 9$  y este número es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 5 cuando termina en 5 o en cero.

$$9. \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 6 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{1 \times 1 \times 6}{2 \times 3 \times 1} = \frac{6}{6} = \frac{6 \div 6}{6 \div 6} = \frac{1}{1} = 1$$

$$10. \quad 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{5}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{10}{10} = 1$$

11. Hallar  $\frac{5}{6}$  de 42  la palabra **de** indica multiplicación

$$\frac{5}{6} \times \frac{42}{1} = \frac{210}{6} = \frac{210 \div 2}{6 \div 2} = \frac{105}{3} = \frac{105 \div 3}{3 \div 3} = \frac{35}{1} = 35$$

12. los  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{5}{6}$  de 10

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{10}{1} = \frac{100}{18} = \frac{50}{9}$$

### 1.2.3.3 División de fraccionarios

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

Uno de los métodos para dividir dos fraccionarios es multiplicar el primer fraccionario, en este caso  $3/5$  por el recíproco del segundo. Este recíproco se logra invirtiendo el numerador y el denominador, o sea que si se tiene  $7/4$ , su recíproco es  $4/7$ .

$$13. \quad \frac{8}{9} \div \frac{4}{3} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$$

$$14. \quad 7 \div \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{3}$$

$$15. \quad \frac{5}{6} \div 4 = \frac{5}{6} \div \frac{4}{1} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$$

$$16. \quad \frac{3}{8} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{8} \times \frac{6}{5} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

$\frac{3}{8}$  → Extremo  
 $\frac{6}{5}$  → Medios  
 $\frac{6}{5}$  → Extremo

---

Teniendo en cuenta que un fraccionario siempre indica división, es decir si se tienen  $3/8$  significa que 3 se tiene que dividir por 8, un fraccionario dividido por otro también se puede colocar uno sobre otro, en este caso  $3/8$  sobre  $5/6$

---

$$\frac{3}{8} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{8} \times \frac{6}{5} = \frac{3 \times 6}{8 \times 5} = \frac{18}{40} = \frac{18 \div 2}{40 \div 2} = \frac{9}{20}$$

Este tipo de operación se realiza por el método **productos de extremos, en este caso 3 x 6 sobre productos de medios 8 x 5**

$$17. \quad \frac{11}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{11}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{11 \times 4}{5 \times 3} = \frac{44}{15}$$

$$18. \quad 26 \div \frac{1}{8} = \frac{26}{1} \div \frac{1}{8} = \frac{26}{1} \times \frac{8}{1} = \frac{26 \times 8}{1 \times 1} = \frac{208}{1} = 208$$

$$19. \quad \frac{6}{7} \div 9 = \frac{6}{7} \div \frac{9}{1} = \frac{6}{7} \times \frac{1}{9} = \frac{6 \times 1}{7 \times 9} = \frac{6}{63} = \frac{6 \div 3}{63 \div 3} = \frac{2}{21}$$

### 1.2.3.4 Números decimales

Dentro del conjunto de números racionales, se encuentra un conjunto numérico que es importante analizarlo y corresponde a los números decimales. Todos hemos escuchado la palabra decimal y globalizamos el concepto a números como 0,32, 3,25 entre otros. En esta parte se pretende dar un formalismo matemático a este sistema numérico que es muy aplicado en todas las áreas del conocimiento.

Para hablar de números decimales, es pertinente recordar qué es un racional y especialmente los números fraccionarios, ya que todo número fraccionario se puede escribir como número decimal.

**Fracción decimal:** se refiere a toda fracción, cuyo denominador es la unidad seguida de ceros por ejemplo:

$$\frac{2}{10} \quad \text{también se puede representar } 2 \times 10^{-1}$$

$$\frac{23}{100} \quad \text{ó también } 23 \times 10^{-2}$$

$$\frac{7}{1000} \quad \text{ó } 7 \times 10^{-3}$$

El número decimal que se obtiene de una fracción decimal se halla de la siguiente forma: se coloca el numerador que tiene la fracción decimal, colocándole una coma [ , ] o un punto [ . ] a su derecha, luego esta coma o punto se corre hacia la izquierda cuantos ceros tenga el denominador, ejemplo:

$\frac{9}{10}$  Se coloca el numerador (9,) y como el denominador (10) tiene un solo cero, se cuenta una sola cifra hacia la izquierda, partiendo del (9), entonces el número decimal queda:

$$0,9$$

$$\frac{12}{100}$$

Se deja el numerador (12) y como el denominador tiene dos ceros, se cuentan dos cifras hacia la izquierda colocándose la respectiva coma.

0,12

$$\frac{56}{1000}$$

Lo mismo que en el caso anterior, se deja el numerador (56) y se corren hacia la izquierda tres cifras, porque el denominador tiene tres (3) ceros : 0,056

$$\frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{8}{100} = 0,08$$

$$\frac{7}{1000} = 0,007$$

$$\frac{65}{1000} = 0,065$$

Las operaciones que se pueden realizar con este tipo de números son iguales a las que se hacen con los enteros.

### ➡ Suma

Se colocan los sumandos unos debajo de los otros, de tal forma que las comas o puntos decimales queden en columna. Se realiza la operación en forma similar a los enteros, colocando en el total la coma de manera que coincida con la columna de las comas.

## Ejemplo:

Realizar la siguiente suma:

Columna de las comas

$$\begin{array}{r} 0,19 \\ 3,81 \\ 0,723 \\ \hline 0,1314 \\ \hline 4,8544 \end{array}$$

### ➡ Resta

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de tal forma que las comas de los decimales queden en columna y se realiza la operación igual que con los números enteros. Ejemplo.

$$\begin{array}{r} 539,72 \\ -11,184 \\ \hline \end{array}$$

Cuando el minuendo o el sustraendo tienen diferentes números de cifras decimales, se pueden completar con ceros, por ejemplo 539,72 tiene dos cifras decimales, mientras 11,184, entonces se coloca un cero a 539,72 para igualarlos.

$$\begin{array}{r} 539,720 \\ -11,184 \\ \hline 528,536 \end{array}$$

## ➔ Multiplicación

Para multiplicar dos decimales o un entero por un decimal, se multiplican como si fueran enteros, corriéndose, en el producto, de la derecha a la izquierda tantas cifras tenga el multiplicando y el multiplicador.

$$\begin{array}{r} 14,35 \\ \times 8,34 \\ \hline 5740 \\ 4305 \\ 11480 \\ \hline 119,6790 \end{array}$$

Se corren cuatro cifras a la izquierda porque cada uno de los factores tiene dos cifras decimales

## ➔ División

Para dividir números decimales, si no son homogéneos, es decir si no tienen el mismo número de cifras decimales, se selecciona el término que tenga mayor número de cifras decimales y se multiplican los dos términos (dividendo y divisor) por la unidad seguida del número de ceros igual al número de cifras decimales que tiene el de mayor número. Luego si se realiza la división de la misma forma que en los números enteros.

## Ejemplo:

Dividir

$$0,5 \div 0,001$$

$$0,5 \times 1000 = 500$$

$$0,001 \times 1000 = 1$$

Como estos números no son homogéneos, se procede a convertirlos en homogéneos, para esto se selecciona el que mayor número de decimales tiene, en este caso 0,001 este número tiene 3 cifras decimales y se procede a multiplicar los dos términos (dividendo y divisor) por la unidad con el número de ceros equivalente a las tres cifras decimales es decir por 1000.

Recordando que para multiplicar por 10, 100, 1000... se corre la coma hacia la derecha tantas veces indica el número de ceros, por ejemplo si es por 100 se corren 2 cifras, si es por 1000 se corren 3 puestos.

Ahora se realiza la división común y corriente:  $500 \div 1 = 500$

Dividir:  $87 \div 0,0186$

De estos dos números el de mayor número decimal es 0,0186 que tiene 4 cifras, entonces los dos, tanto dividendo como divisor se multiplican por 10000.

$$87 \times 10000 = 870000$$

$$0,0186 \times 10000 = 186$$

Ahora si se procede a realizar la división con números enteros.

## Clases de números decimales

### ➔ Decimales exactos

Son aquellos que provienen de una fracción, cuya división es exacta.

#### Ejemplos:



porque al realizar la división, el residuo es cero.

$$\frac{6}{20} = 0,3$$

### ➔ Decimales periódicos

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

Son aquellos que provienen de una fracción, que al hacer la división presenta un residuo que se repite infinitas veces.

Ejemplo:  $\frac{2}{9}$  origina un decimal periódico.

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 2} \\ 20 \quad 0,222 \\ \underline{20} \\ 2 \end{array}$$

Se puede observar en la división que el residuo siempre será el número 2.

Entonces  $0, 222\dots$  es un decimal periódico, el número que se repite es el 2.

$0, 343434\dots$  Es un decimal periódico, donde el número que se repite es el 34.

$5, 13213213213\dots$  Es un decimal periódico, cuyo valor que se repite es el 132.

**A** Como los números decimales periódicos no tienen fin, existe una forma de escribirlos en forma simplificada y es colocándole una rayita encima a los números que se repiten.

## Ejemplos:

$0, \overline{2}$  La rayita encima del dos, indica que éste se repite infinitas veces.

$0, \overline{34}$  Indica que el 34 se repite infinitas veces.

$5, \overline{132}$  Igual que en los casos anteriores.

### ➔ Decimal mixto

Es aquel que tiene una parte exacta y una parte periódica.

Veamos algunos ejemplos:

$0, 4222\dots$  En este número la parte exacta es el 4 y la parte periódica es el 2.

5, 82444... La parte exacta es el 82 y la parte periódica es el 4.

0, 3527878787... En este número la parte exacta es 352 y la parte periódica es 78.

Los anteriores números se pueden escribir:

$$0,4\bar{2} \quad 5,8\bar{2}4 \quad 0,352\bar{7}8$$

## Decimales no periódicos

Son números que provienen de una fracción racional, que al hacer la división, el residuo en cada paso de ésta es diferente. Estos decimales tienen gran importancia por las características especiales, lo cual se puede estudiar en un curso de Topología. Por ahora lo primordial es conocer este conjunto numérico.

Algunos ejemplos de este tipo de decimales son: 

0, 12345...

2, 3467541...

0, 12313245276...

Como se puede observar, estos números NO tienen una secuencia de repetición.

Dos números irracionales que merecen ser destacados son:

Número  $\pi \cong 3,141592654\dots$  se define como la relación

$$\frac{\text{Longitud de la circunferencia(L)}}{\text{Diámetro(D)}}$$

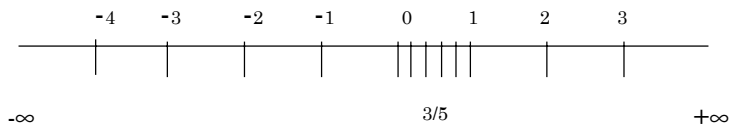
Este número es utilizado para la medición de ángulos en el sistema hexadecimal, o sea los radianes, donde se sabe que  $\pi=180^\circ$  o sea media vuelta a un círculo.

Número  $e : 2, 71828183\dots$  Usado como base de los logaritmos naturales o neperianos.

### 1.2.4 Números reales

En general los números reales son todos los que hemos estudiado hasta el momento. Una de las principales características de los números reales es la de poder ser graficados en una recta. Esta es la recta real y está constituida por puntos los cuales representan un número real que puede ser racional o irracional (estos últimos, se refieren a los que tienen un número infinito de decimales, por ejemplo, el número  $\pi$  que es igual  $3,14159\dots$ , por este motivo no es considerado fraccionario. Los números irracionales se denotan con la letra  $\mathbf{Q}$ ).

$(\mathbf{Z}^-)$



En la gráfica, los números de la parte superior son los enteros, los de la izquierda son los enteros negativos  $(\mathbf{Z}^-)$  y los de la derecha son los enteros positivos  $(\mathbf{Z}^+)$ . Es importante resaltar que también se pueden representar los números racionales ( $\mathbf{Q}$ ), por ejemplo  $3/5$ , es decir se divide la unidad en cinco partes y se toman tres (3) partes de esta.

Como el conjunto de los Reales involucra a los conjuntos  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Q}'$  entonces las operaciones que se pueden realizar con este tipo de conjuntos son: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

## Repasemos

Como se supone que hasta ahora, las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) ya han sido estudiadas y asimiladas, a continuación solamente se trabajarán las operaciones de potenciación, radicación y logaritmicación.

Antes de iniciar con las temáticas anteriormente planteadas, es necesario recordar cuáles son los módulos de la suma y la multiplicación y establecer cuales son los inversos aditivos.

Cuando a una cantidad Real se le suma cero (0), el resultado es la misma cantidad, por lo tanto, **el número cero (0) se conoce como el módulo de la suma.**

Ejemplos:  $5 + 0 = 5$ ;  $10 + 0 = 10$ ;  $13 + 0 = 13$

En la multiplicación el módulo es el uno (1), porque el multiplicar un número real por uno (1) se obtiene el mismo número.

Ejemplos:  $3 \times 1 = 3$ ;  $85 \times 1 = 85$ ;  $276 \times 1 = 276$

**El inverso aditivo** se refiere al número que sumado con su opuesto da como resultado cero (0).

Ejemplos:  $4 + (-4) = 0$ , entonces el inverso aditivo de 4 es -4

$-8 + 8 = 0$  entonces el inverso aditivo de -8 es 8

**El inverso multiplicativo o recíproco se refiere al número que multiplicado por su respectivo se obtienen como producto el número uno (1).**

### Ejemplos:

$\Rightarrow 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$ , entonces el recíproco de 7 es  $\frac{1}{7}$  o también  $\frac{1}{7}$  es el recíproco de 7

Una forma de presentar los recíprocos es con el exponente negativo (-) así:

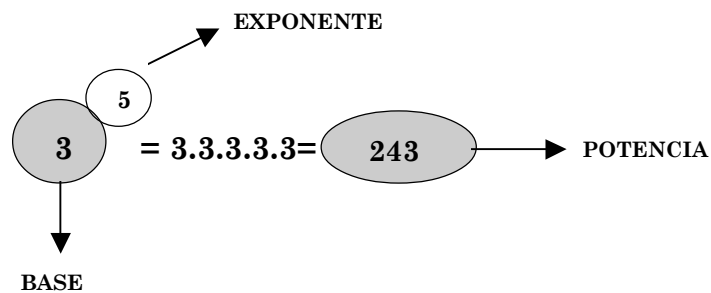
$\Rightarrow$  El recíproco de 2 es  $\frac{1}{2}$  porque  $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ,  
la otra forma de expresarlo es  $2 \cdot 2^{-1} = 1$

$\Rightarrow$  9 es el recíproco de  $\frac{1}{9}$  porque  $9 \cdot \frac{1}{9} = 1$  ó  $9 \cdot 9^{-1} = 1$

$\Rightarrow \frac{3}{5}$  es el recíproco de  $\frac{5}{3}$  porque  $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$

### 1.2.4.1 Potenciación

La potenciación es una operación que simplifica la multiplicación, ya que se puede decir que la potenciación es una multiplicación sucesiva. Esta operación es útil para abordar temas como la suma y resta de fraccionarios y simplificación, entre otras, por lo tanto es necesario tener muy claro el concepto de potenciación.



**BASE:** se refiere al número que se multiplica por sí mismo, en este caso **3**.

**EXPONENTE:** es el número de veces que se repite (o que se multiplica) la base, en este caso **5**.

**POTENCIA:** es el resultado de multiplicar la base tantas veces indica el exponente, en el ejemplo, **243**.

Veamos otros ejemplos de potenciación:

$$2^3 = 2.2.2 = 8$$

$$5^4 = 5.5.5.5 = 625$$

$$a^4 = a.a.a.a$$

Matemáticamente la potenciación se representa:

$$a^e = p$$

**Donde:**

$a$  = BASE. Número que se multiplica por si mismo.

$e$  = EXPONENTE. Las veces que se multiplica la base por si misma.

$p$  = POTENCIA. Es el resultado de la operación.

### ➔ Potencia de base positiva

Cuando la base es positiva y el exponente positivo, la potencia es positiva. Es el caso de los ejemplos anotados anteriormente.

A continuación se relacionan otros ejemplos:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (-4)^4 = 256$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5^4 = 625$$

$$12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12^3 = 1.728 \quad (\text{Comprobar los resultados})$$

### ➔ Potencia de base negativa

Cuando la base es negativa, se presentan dos casos:

⇒ Si el exponente es **PAR**, la potencia es positiva. Ejemplos:

⇒ Si el exponente es **IMPAR**, la potencia es negativa. Veamos:

## Potencia de exponente negativo

Cuando el exponente es negativo, aplicamos el recíproco para desarrollar la operación.

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$(4)^{-3} = \frac{1}{(4)^{-3}} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$$

Se debe tener cuidado con el manejo de los signos negativos, el paréntesis indica que el número está afectado por el signo, veamos los siguientes casos:

$$(-5)^2 = 25, \text{ mientras que } -5^2 = -25$$

## ➔ Propiedades de la potenciación

⇒ **Potencia de exponente cero:** toda base cuyo exponente es cero (0), la potencia es la unidad (1).

$$2^0 = 1$$

Ejemplos

$$a^0 = 1$$

$$25^0 = 1$$

⇒ **Potencia de exponente uno:** toda base cuyo exponente es la unidad, tiene como potencia, la misma cantidad. (Ley modulativa de la potencia).

$$2^1 = 2$$

Ejemplos

$$32^1 = 32$$

$$x^1 = x$$

**Potencia de bases iguales:** cuando se tienen dos o más bases iguales multiplicándose entre sí, se operan, dejando la misma base y sumando los exponentes.

⇒

$$2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^1 = 2^{3+4+1} = 2^8$$

Ejemplos

$$5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 = 5^{2+3+4} = 5^9$$

$$y^a \cdot y^b \cdot y^c = y^{a+b+c}$$

**Potencia de un producto:** cuando se tiene un producto de varios términos, elevados al mismo exponente, se expresa como producto de cada uno de los términos elevados al mismo exponente.

$$(4 \cdot 7 \cdot 9)^2 = 4^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2$$

$$(x \cdot y \cdot z)^a = x^a \cdot y^a \cdot z^a$$

**Potencia de un cociente:** para dividir potencias de la misma base, se restan los exponentes.

$$2^8 \div 2^5 = 2^{8-5} = 2^3$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$$

$$\left(\frac{y^a}{y^b}\right) = y^{a-b}$$

$$\left(\frac{6^5}{6^2}\right) = 6^{5-2} = 6^3 = 216$$

$\Rightarrow$  **Potencia de una potencia:** cuando una potencia está elevada a otra potencia, la potencia tiene como base, la base de la potencia y como exponente el producto de los exponentes.

$$((2^8)^2) = 2^{8 \times 2} = 2^{16}$$



⇒ **Potencia Base Natural:** se refiere a toda aquella potencia cuya base es el número  $e$ . Conocido como el número de Euler ( $e \approx 2,71828182\dots$ ). Ejemplos:

$$e^1 = e$$

$$e^3 = 20,08553$$

# Autoevaluación

# 1

**Potenciación.** Realizar las siguientes operaciones:

1.  $9^0$

2.  $-5^1$

3.  $(-5)^4$

4.  $(-3)^2 + (-2)^3$

$$\left(\frac{2^2 5^{-3}}{2^4 5^{-7}}\right)^3$$

5.  $(x^2 x^4)^3$

$$(3^{-2} + [2^3 + 4^2] - 10^0)$$

6.  $(y^3 z^4)^5$

$$5^3 + \frac{4^2}{3^{-2}} - (-7^{-2})$$

7.

$$\left[\frac{x^{-3} y^{-4} z^{-2}}{y^{-3} z^{-4} 3^4}\right]^{-2}$$

8.

9.

10.

### 1.2.4.2 Radicación

Es una operación inversa a la potenciación y consiste en hallar la **base**, conociendo el exponente y la potencia.

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Entonces, para conocer la base se acude a la radicación  $\sqrt[3]{125} = 5$ , donde:

- 3** es el índice de la raíz (en la potenciación es el exponente)
- 125** es el radicando (este número corresponde a la potencia en el caso de potenciación)
- 5** es la raíz cúbica (3) de 125 (en la potenciación corresponde a la base)

Matemáticamente la radicación se puede expresar así:

$$\sqrt[n]{r} = m, \text{ donde:}$$

- n** = Índice, el cual es un número entero positivo, mayor o igual a 2.
- r** = Radicando, es la cantidad a la cual se le va a extraer la raíz n-esima. Esta cantidad puede ser positiva o negativa, según el caso.
- m** = La raíz n-esima de r, este valor puede ser positivo, negativo o los dos, según el caso.

Entonces la expresión  $\sqrt[n]{r} = m$  también se puede expresar como:

$$m^n = r$$

## ➡ Clases de raíces:

⇒ Raíces de índice par: ( $r = \text{par}$ )

Las raíces de índice **par** tienen solución para números reales (radicando) mayores o iguales a cero.  $r \geq 0$ , en este caso la solución es doble, es decir una es positiva y la otra negativa.

Ejemplo:

$$\sqrt{16} = \pm 4, \text{ porque } (+4)^2 = 16 \text{ y } (-4)^2 = 16$$

$$\sqrt{81} = \pm 9, \text{ porque } (+9)^2 = 81 \text{ y } (-9)^2 = 81$$

**Repasemos**

Cuando el índice es dos (2) no se escribe, porque se asume que este es el mínimo que existe.

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{2401} = \pm 7 \text{ [comprobarlo]}$$

$$\sqrt{225} = \pm 15 \text{ [comprobarlo]}$$

Cuando el radicando es negativo la solución NO es real, este tipo de solución se le ha llamado IMAGINARIA, la cual se estudiará más adelante.

⇒ **Raíces de índice impar: ( $r = \text{impar}$ )**

Las raíces de índice impar tienen solución para cualquier número real.  $r \in \mathbb{R}$ . La solución depende de signo del radicando. Si el radicando es positivo, la solución es positiva, pero si el radicando es negativo, la solución es negativa. Lo anterior indica que la solución de raíces de índice impar es única. Ejemplos:

**Propiedades de los radicales:**

⇒  $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$  (es decir, un radical se puede presentar de dos formas: **con el símbolo de la radicación**  $\sqrt{\quad}$  o simplemente **el radicando con exponente fraccionario**, donde el numerador corresponde al exponente que tiene el radicando y el denominador al índice de la raíz.

Por ejemplo  $\sqrt[3]{12^2}$  puede representarse también como  $12^{\frac{2}{3}}$  donde (2) es el exponente que tiene el radicando y (3) es el subíndice de la raíz. Ejemplos:

$$\sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}}$$

$$\sqrt[4]{9^7} = 9^{\frac{7}{4}}$$

$\sqrt[2]{3} = 3^{\frac{1}{2}}$  En este caso el radicando (3) no tiene exponente, se sobreentiende que es uno (1).

$$\sqrt[4]{612} = +8 \quad p$$

$$\sqrt[5]{-243} = -3 \quad :$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{0} = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{1} = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{ab}}$$

Ejemplo:  $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10$



**OJO:**  $\sqrt{a+b}$  es diferente ( $\neq$ )  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{125}{25}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{a^n} = a} \text{ Porque } a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

$$\sqrt[4]{10^4} = 10 \text{ Porque } 10^{\frac{4}{4}} = 10^1 = 10$$

# Autoevaluación 2

**Radicación.** Realizar los siguientes ejercicios:

1.  $\sqrt[3]{54^3}$

2.  $\sqrt[3]{0}$

3.  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

4.  $\sqrt[5]{-256}$

5.  $\sqrt{\frac{1}{25}}$

6.  $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} + \sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$

7.  $\sqrt{-16} + \sqrt[4]{-16}$

8.  $\frac{5}{\sqrt[3]{-125}}$

9.  $\sqrt[4]{x^4 y^2 z^6}$

10.  $\sqrt[5]{\frac{1}{y^{1/2}}}$

### 1.2.4.3 Logaritmación

Es otra de las operaciones inversa a la potenciación y consiste en hallar el **exponente**, conociendo la base y la potencia.

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Como en la logaritmación lo que se halla es el exponente, el ejemplo anterior queda:  $\text{Log}_5 125 = 3$  (logaritmo en base 5 de 125 igual a 3).

La forma general de representar la logaritmación es:

$$\text{Log}_a x = y \quad \text{Es lo mismo que decir: } a^y = x$$

Donde:

$a$  = Base del logaritmo, es un número mayor que cero, pero diferente de uno.  $a > 0$ , y  $a \neq 1$ . Cuando **a** equivale a 10 se le llama **logaritmo decimal** y se representa Log. Así mismo, cuando **a** vale *e* (Número de Euler) se le llama logaritmo natural o neperiano y se representa **Ln**.

$x$  = Número al que se le extrae logaritmo. Este número  $x$  siempre será positivo  $x > 0$ . Esto nos indica que **el logaritmo de números negativos NO existen**, al igual que el logaritmo de cero o de un número complejo.

$y$  = Es el logaritmo, o sea el exponente al que se eleva  $a$  para ser igual a  $x$ . Este es positivo si  $x$  es mayor que uno ( $x > 1$ ), y es negativo si  $x$  esta entre cero y uno. ( $0 < x < 1$ ).

Es importante recordar que el símbolo  $>$   
indica mayor que  
y el símbolo  $<$  menor que, ejemplo  $5 > 3$   
(indica que 5 es mayor que 3) y  $7 < 10$   
(indica que 7 es menor que 10).

### Ejemplos:

$$\text{Log}_2 256 = 8 \text{ porque } 2^8 = 256$$

$$\text{Log}_7 49 = 2 \text{ porque } 7^2 = 49$$

$$\text{Log}_4 64 = 3 \text{ porque } 4^3 = 64$$

$$\text{Log}_a b = 3 \text{ porque } a^3 = b$$

⇒

**Logaritmos decimales:** se caracterizan por tener la base 10.

$$\text{Log}_{10} 10 = 1 \text{ porque } 10^1 = 10$$

$$\text{Log}_{10} 100 = 2 \text{ porque } 10^2 = 100$$

$$\text{Log}_{10} 1000 = 3 \text{ porque } 10^3 = 1000 \text{ y así sucesivamente.}$$

$\text{Log}_{10} 1 = 0$  porque  $10^0 = 1$  (recordemos que la potencia de una base elevada al exponente cero (0) es igual a 1).

Es de aclarar que en los **logaritmos decimales** no es necesario colocar la base, se sobreentiende que es diez (10), entonces se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\text{Log } x = y$$

$$\text{Log } 1 = 0$$

$$\text{Log } 10 = 1$$

$$\text{Log } 100 = 2$$

En este caso el logaritmo es negativo porque la base  $\frac{1}{10}$  está entre cero y uno

$$\text{Log } \frac{1}{100} = -2$$

⇒ **Logaritmo natural:** como ya se había dicho anteriormente, cuando la base de un logaritmo es el número  $e$ , se le conoce como **logaritmo natural**, se puede escribir:  $\text{Log}_e x$  o  $\text{Ln} x$ . Ejemplos:

$$\Rightarrow \text{Log } \frac{1}{10} = -1$$

Utilizando una calculadora, hallar el logaritmo de los siguientes números:

$$\text{Ln } 1 = 0$$

$$\text{Ln } 2 = 0,69314$$

$$\text{Ln } 10 = (\text{completar})$$

$$\text{Ln } 0,5 = (\text{completar})$$

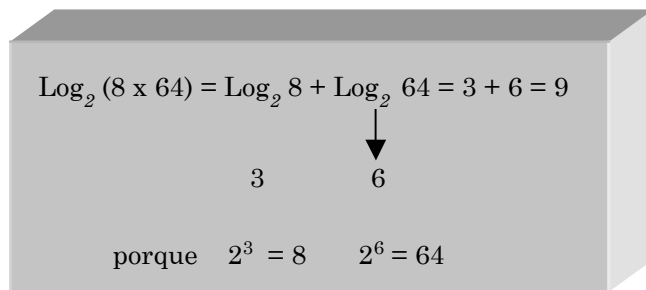
## Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de uno es igual a cero:  $\text{Log } 1 = 0$

⇒ Logaritmo de la base:  $\boxed{\text{Log}_n n = 1}$  Ejemplo  $\text{Log}_5 5 = 1$  porque  $5^1 = 5$

Logaritmo de un producto:  $\boxed{\text{Log}_a PQ = \text{Log}_a P + \text{Log}_a Q}$

Ejemplo  $\text{Log}_2 (8 \times 64) = \boxed{\text{Log}_2 8 + \text{Log}_2 64 = 3 + 6 = 9}$



⇒ **Logaritmo de un cociente:**

Ejemplo:

$$\text{Log}_5 (125/25) = \text{Log}_5 125 - \text{Log}_5 25 = 3 - 2 = 1$$

$\qquad\qquad\qquad 3 \qquad\qquad\qquad \downarrow 2$

porque  $5^3 = 125$        $5^2 = 25$

$$\text{Log}_a \frac{P}{Q} = \text{Log}_a P - \text{Log}_a Q$$

# Autoevaluación

## 3

### Logaritmicación.

1.  $\text{Log}_4 64$
2.  $\text{Log}_2 32$
3.  $\text{Log}_5 125$
4.  $\text{Log}_3 \frac{1}{9}$
5.  $\text{Log} 20$
6.  $\text{Log} 10 + \text{Log} 100$
7.  $\text{Log} 590 - \text{Log} 70$
8.  $\text{Ln} 10$
9.  $\text{Ln} 100$
10.  $\text{Ln} 1 + \text{Ln}(1/2)$

### 1.2.5 Los números complejos

Para hablar de los números complejos, es necesario primero estudiar los números imaginarios, lo cual haremos a continuación:

⇒ **Números imaginarios:** son aquellos que se obtienen de las raíces de números negativos, cuando el índice es par. Por ejemplo el valor de  $\sqrt{-4}$  no tiene solución en los reales, ya que NO existe un número real que al elevarlo a la dos (2) se obtenga -4, o sea:  $x^2 = -4$ , no tiene solución en los reales.

Para dar solución a este tipo de operaciones, los matemáticos han encontrado un sistema de numeración llamados LOS IMAGINARIOS, los cuales sirven para obtener la raíz par de un número negativo.

Los principios fundamentales de los números imaginarios son:

$$\sqrt{-4}$$

$$\boxed{\sqrt{-1} = i} \quad \boxed{-1 = i^2}$$

Analicemos ahora cómo es el comportamiento de las potencias del número imaginario.

$$i = \sqrt{-1} = i$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = (\sqrt{-1})^2 \sqrt{-1} = -1i = -i$$

Para resolver un radicando negativo de índice par, se procede de la siguiente forma:

Si se tiene  $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \sqrt{-1} = 4i$  porque la raíz de 16 es 4 y  $\sqrt{-1} = i$

$$\sqrt{-45} = \sqrt{45 \cdot (-1)} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot (-1)}$$

Porque 45 se puede descomponer en 9 . 5, nueve tiene raíz exacta que es 3 mientras que 5 no tiene raíz exacta entonces queda dentro del radical. Así mismo,  $\sqrt{-1} = i$  , entonces el resultado es  $3\sqrt{5} i$  .

Con estos conceptos, ya se pueden abordar los NUMEROS COMPLEJOS.

Los números complejos son de la forma:

**a + bi** donde:

**a** y **b** = parte real

*i* = parte imaginaria

Los siguientes son números complejos:

$$3 + 4i \quad - 2 + 5i \quad 3i \quad 1 - i \quad -8 - 7i$$

## Repasemos

Todo número complejo tiene su conjugado, el cual es el mismo número pero con signo contrario en la parte imaginaria.

Número	Conjugado
10 - 5i	10 + 5i
12 + i	12 - i
-25 - 4i	-25 + 4i

## Operaciones con números complejos

⇒ **Suma:** dos o más números complejos se suman operando término a término. Ejemplos:

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3i + 5i) = 6 + 8i$$

Se suman las partes reales entre sí y las imaginarias entre sí:

$$(7 - 5i) + (10 + 8i) = 17 + 3i$$

**Resta:** se opera igual que en la suma, solo que en este caso es restando.

Ejemplos:

$$(18 + 12i) - (13 + 4i) = (18 - 13) + (12i - 4i) = 5 + 8i$$

$$(9 - 2i) - (13 - 5i) = (9 - 13) + (-2i + 5i) = -4 + 3i$$

$$(-19 - 14i) - (-15 - 4i) = (-19 + 15) + (-14i + 4i) = -4 - 10i$$

Recordando que cuando se suma o resta signos iguales, se realiza una suma y se deja el mismo signo, mientras que si se tienen signos contrarios, se restan y se deja el signo del número mayor.

Del resultado anterior, se puede observar que la suma o resta de números complejos, origina otro número complejo.

**Multiplicación:** la operación se hace de la siguiente manera:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplos:  $(3 + 6i) \cdot (4 + 7i) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7i + 4 \cdot 6i + 6i \cdot 7i$

$$= 12 + 21i + 24i + 42i^2$$

$$= 12 + 45i - 42 \quad \text{Recordemos: } (i^2 = -1)$$

Entonces:

$$(3 + 6i) \cdot (4 + 7i) = -30 + 45i$$

Ejemplo:  $(-6 - 5i) \cdot (4 - 3i) = -24 + 18i - 20i + 15i^2$

$$= -24 - 2i - 15$$

$$= -39 - 2i$$

$$\frac{a + bi}{c - di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c + di}{c + di} = \frac{(ac + db) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Como se observa, la multiplicación de números complejos origina otro complejo.

$$\frac{3 + 5i}{3 - 2i} = \frac{3 + 5i}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{9 + 6i + 15i + 10i^2}{9 + 4} = \frac{9 + 21i - 10}{13} = \frac{-1 + 21i}{13}$$

**División:** Para dividir números complejos, se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador. Veamos:

$$\frac{1 - 8i}{2 + i} = \frac{1 - 8i}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{2 - i + 8i + 8i^2}{4 - i^2} = \frac{2 - 9i - 8}{4 + 1} = \frac{1}{5}(-6 - 9i)$$

# Autoevaluación

## 4

**Números complejos.** Realizar las siguientes operaciones:

1.  $i^4 = ?$

2.  $i^5 = ?$

3.  $\sqrt{-36} = ?$

4.  $\sqrt{-50}$

5.  $\sqrt{-98} - \sqrt{-162} = ?$

6.  $\sqrt{-25} + \sqrt{-36}$

7. El conjugado de  $(-5 + 4i)$  es:

Realizar las operaciones indicadas

8.  $(a + bi) + (x - yi)$

9.  $(-5i + 3) - (8 + 3i)$

10.  $(3 - 8i) \div (4 + 2i)$

11.  $i \cdot (3 - i)$

# CAPITULO

# 2

# Algebra

## Contenido

Autoevaluación inicial

2.1 Expresiones algebraicas

2.2 Adición de expresiones algebraicas

2.3 Signos de agrupación

2.4 Multiplicación de expresiones algebraicas

2.5 División

2.6 Productos notables

2.7 Cocientes notables

2.8 Factorización

2.9 Máximo común divisor

2.10 Fracciones algebraicas



Así como en el capítulo anterior, lo invitamos a desarrollar esta evaluación, con el propósito de que establezca qué tanto sabe sobre la temática que se va a tratar y así se motive para aprender las temáticas que crea no domina.

1. Simplificar:

$$-\{-[-(a+b-c)]\}-\{+[-(c-a+b)]\}+\{-[-a+(-b)]\}$$

2. Multiplicar:

3. Dividir:  $(3a^2 - 2a^2 + 5a - 2)$  por  $(2a^2 + 4a - 3)$

$$(6 + x^2 + 5x) \text{ entre } (x + 2)$$

Escribir por simple inspección el resultado de:

4.  $(1 - 4ax)^2$

5.  $(5a - x)^3$

6.  $\frac{9 - a^2}{3 - a^2}$

Factorizar:

7.  $a^2 + a - ab - b$

8.  $1 - 4c + 4c^2$

9.  $7b^2 + 6b^4 - 20$

10. Reducir a su más simple expresión:  $\frac{2ax + ay - 4bx - 2by}{x - 4a - 2bx + 8b}$

11. Simplificar:  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x+2)} + \frac{(x+1)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$



Al igual que para jugar un partido de fútbol es necesario saber cuáles son las reglas del juego, para el entendimiento del álgebra es necesario conocer las reglas que se deben cumplir como por ejemplo, no se puede factorizar si no se sabe cómo sumar o restar términos semejantes, no se puede simplificar si no se tiene conocimiento sobre la factorización. A continuación se hace una síntesis de las principales pautas para el desarrollo del álgebra.

## 2.1

### Expresiones algebraicas

**L**as expresiones algebraicas son combinaciones de números y letras unidos por las operaciones fundamentales del álgebra. Estas expresiones están formadas por:

⇒ **Términos:** los cuales están compuestos por el **signo**, **coeficiente** (generalmente la parte numérica), **base** y **exponente**. Así por ejemplo, en el término  $3x^2$ , el signo, aunque no está escrito, se sobreentiende que es positivo (+) el coeficiente es 3, la base es  $x$  y el exponente es 2.

#### **A**

Dos o más términos son semejantes cuando tienen igual base e igual exponente.

## Ejemplos:

Los siguientes términos son semejantes porque todos tienen como base  $x$  y como exponente el 2 .

$$2x^2, 5x^2, 8x^2, x^2- 10x^2$$

Los signos de los 4 primeros son positivos y el del último es negativo, los coeficientes de estos términos son: 2, 5, 8, 1 y -10 respectivamente.

Se recuerda que cuando la base no tiene ningún coeficiente, en este caso  $x^2$ , se sobreentiende que éste es  $1$ .

Si se tienen los siguientes términos:

$$3x, 2y^2, 5y, 9x, 7x^2, 10x^2, 6x, 8y$$



Los términos semejantes son:

$$3x, 9x, 6x$$

$$7x^2, 10x^2$$

$$5y, 8y$$

$2y^2$  no tiene otro término semejante.

Una expresión algebraica puede definirse como la unión de términos algebraicos a través de las operaciones fundamentales del álgebra como la: adición y la resta. Ejemplo:

$$3x^2 + 5y - 5$$

## 2.2

### Adición de expresiones algebraicas

**T**oda expresión algebraica ligadas por los signos  $+$  y  $-$  se llama **suma algebraica**.

**A** Para desarrollar la suma algebraica de dos o más términos primero se buscan los términos semejantes y luego se suman o restan los coeficientes (dependiendo de la operación indicada).



Ejemplo, la suma de:

$$3x + 5y + 1 \quad \text{y} \quad 2x - 3y + 8 = 3x + 5y + 1 + 2x - 3y + 8$$

Los términos semejantes de esta expresión son:

$3x + 2x =$  Se suman los coeficientes  $(3 + 2) = 5$  y se deja la misma base ( $x$ ); entonces la expresión queda reducida a:

$$\boxed{5x}$$

$$5y - 3y = (5 - 3)y = \boxed{2y}$$

$$1 + 8 = \boxed{9}$$

El total de esta suma algebraica es  $\boxed{5x + 2y + 9}$

# Repasemos

## Ejercicios

## resueltos

Realizar las siguientes operaciones:

$$1. 7a + 2a + 5a = (7 + 2 + 5)a = 14a$$

$$2. -4b - 9b = (-4 - 9)b = -13b$$

En la suma algebraica, cuando los términos tienen el mismo signo, se suman y se deja el mismo signo.

$$\text{Entonces: } -4 - 9 = -13$$

En la suma algebraica, cuando los términos tienen diferentes signos, se restan y se deja el signo que tenga el número mayor.

Ejemplo:  $7 - 9 = -2$  porque como tienen diferentes signos, es decir uno es  $+$  y el otro  $-$ , se restan y el resultado en este caso es 2 y el signo del número mayor absoluto es  $-$ .

$$3. 8x^2 + 2x^2 - 6x^2 - x^2 = (8 + 2 - 6 - 1) x^2 = 3x^2$$

4.

En la suma de fraccionarios homogéneos (tienen el mismo denominador), se suman sus numeradores y se deja el mismo denominador.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}c^3 + \frac{7}{5}c^3 - \frac{2}{5}c^3 &= \frac{(1+7-2)}{5}c^3 = \frac{6}{5}c^3 \\ \frac{3}{4}a^{m+1} - \frac{7}{4}a^{m+1} + \frac{11}{4}a^{m+1} - \frac{9}{4}a^{m+1} &= \frac{(3-7+11-9)}{4}a^{m+1} = \\ &= -\frac{2}{4}a^{m+1} = -\frac{1}{2}a^{m+1} \end{aligned}$$

$$6. \frac{1}{2}b^{n-1} + \frac{2}{3}b^{n-1} - \frac{7}{6}b^{n-1} + \frac{1}{2}b^{n-1} - b^{n-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{6} + \frac{1}{2} - 1\right)b^{n-1}$$

Para realizar una suma de fraccionarios No homogéneos, (diferentes denominadores), se halla el denominador común, el cual se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y este resultado se multiplica por su respectivo numerador.

Entonces:

$$7. a^4b - a^3b^2 + a^2b - 8a^4b - a^2b - 8 + a^3b^2 - 7a^3b^2 - 7 + 21a^4b - a^3 + 48$$

Los términos semejantes son:

$$\Rightarrow a^4b - 8a^4b + 21a^4b = (1 - 8 + 2)a^4b = \boxed{14a^4b}$$

$$-a^3b^2 + a^3b^2 - 7a^3b^2 = (1 - 1 - 7)a^3b^2 = \boxed{-7a^3b^2}$$

$$a^2b - a^2b = (1-1)a^2b = 0a^2b = \boxed{0}$$

$\boxed{-a^3}$  No hay otro término semejante

$$- 8 - 7 + 48 = \boxed{33}$$

$$\text{Entonces: } 14a^4b - 7a^3b^2 + 0 - a^3 + 33 =$$

$$\boxed{14a^4b - 7a^3b^2 - a^3 + 33}$$

$$8. x^{a+2} - 5x^{a+1} - 6x^a - x^{a+3} + 8x^{a+1} - 10$$

Los términos semejantes son:

$\boxed{x^{a+2}}$  No tiene otro término semejante

$$- 5x^{a+1} + 8x^{a+1} = (-5 + 8)x^{a+1} = \boxed{3x^{a+1}}$$

$\Rightarrow$   $-6x^a$  No tiene otro término semejante

$-x^{a+3}$  No tiene otro término semejante

$\Rightarrow$   $-10$  No tiene otro término semejante

El resultado es:  $x^{a+2} + 3x^{a+1} - 6x^a - x^{a+3} - 10$ . Al ordenar en forma decreciente, de acuerdo con el exponente se obtiene:

$$-x^{a+3} + x^{a+2} + 3x^{a+1} - 6x^a - 10$$

## 2.3

### Signos de agrupación

$\ominus$

$[]$

$\{\}$

**E**xisten diferentes signos de agrupación o paréntesis que se emplean para indicar como un todo las cantidades contenidas en estos, los más usados son:

Paréntesis

Corchete

La llave

Ejemplo:  $3y + (x + y)$  significa que a la expresión  $3y$  se le suma  $(x + y)$  entonces:

$$3y + (x + y) = 3y + x + y = 4y + x$$

Para hallar el resultado es necesario eliminar el paréntesis y para ello es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

Cuando un paréntesis está precedido por el signo (+),  
se dejan las cantidades que están dentro del  
paréntesis con el mismo signo.

Ejemplo:  $2x + (5y - 7x)$  como al paréntesis le antecede el signo  $+$ , las  
cantidades que están dentro de éste quedan iguales:

$$= 2x + 5y - 7x$$

Agrupando términos semejantes queda:  $= -5x + 5y$

Cuando un paréntesis está precedido por  
el signo (-), las cantidades que están dentro  
del paréntesis cambian de signo al  
eliminar dicho paréntesis.

⇒

Ejemplo:  $4x^2 - (2x - 6x^2 + 7x)$  como el paréntesis está precedido por el  
signo  $-$  todos los términos que están dentro del paréntesis cambian de  
signo.

$$4x^2 - 2x + 6x^2 - 7x = 10x^2 - 9x$$

# Ejercicios

## resueltos

Simplificar suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

1.

En este ejercicio se tienen que destruir dos paréntesis, para esto es necesario ir destruyendo paréntesis por paréntesis, empezado por el más interno (el que está contenido dentro del otro), entonces el proceso es el siguiente:

$$[7x + [x - (2x + y)]]$$

⇒ Destrucción del paréntesis más interno ( ) y como éste está precedido del signo  $-$ , todos los términos contenidos en éste cambian, entonces:

$$\boxed{\phantom{7x + x - 2x - y}}$$

Luego se destruye el otro paréntesis  $+$ , en este caso está precedido por el signo  $+$ , por lo tanto todos sus términos conservan el mismo signo:

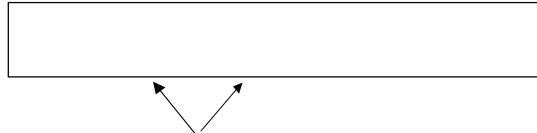
$$\boxed{7x + x - 2x - y}$$

Y por último se reducen los términos semejantes, entonces el resultado es:

$$\boxed{6x - y}$$

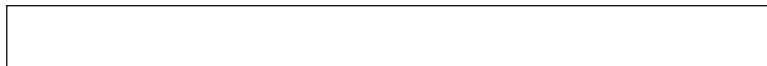
2.

En este ejercicio, también se tienen dos tipos de signos de agrupación [ ] y { }. Los se pueden destruir al tiempo, porque no está uno dentro del otro, sino que están al mismo nivel entonces:



Se observa que en el primero de estos paréntesis ( ) no aparece ningún signo que preceda a este paréntesis, pero cuando esto sucede tácitamente se sobreentiende que es  $+$ , entonces los términos  $(b - c)$  quedan con el mismo signo, mientras que el segundo paréntesis ( ) está precedido por el signo negativo razón por la cual sus términos cambian de signo.

Ahora se procede a eliminar el segundo signo de agrupación [ ] y como este está precedido por el signo  $-$  todos sus términos cambian, así:



Por último se reducen los términos semejantes:

$$5b - b - c - b - c = 5b + 2c$$

3.  $m + \{(-2m + n) - (-m + n - p) + m\}$

Los signos de agrupación ( ) están contenidos dentro de { }. Los dos están al mismo nivel, es decir no está contenido uno en el otro, razón por la cual se pueden destruir simultáneamente.



Ahora se destruye la llave quedando:

$$m - 2m + n + m - n + p + m$$

Por último se reducen los términos semejantes:

$$m + p$$

4.

En este caso hay tres signos de agrupación que son ( ), [ ] y { } .

Inicialmente se pueden destruir los paréntesis ( ), porque el primero está libre y los otros dos son los más internos:

$$\begin{aligned} & 2x - (-4x + y) - \{ -[-4x + (y - x) - (-y + x)] \} \\ & = 2x + 4x - y - \{ 4x - 4x + y - y + x \} \end{aligned}$$

Ahora se destruye [ ]

$$\text{[Empty box for the next step of the algebraic simplification.]}$$

Luego la llave

$$\begin{aligned} & 2x + 4x - y - \{ 4x - y + x - y + x \} = \\ & = 2x + 4x - y - 4x + y - x + y - x \end{aligned}$$

y por último se reducen los términos semejantes:

$$2x + 4x - y - 4x + y - x + y - x = y$$

5.

Empezando por los paréntesis más internos ( ):

↓                      ↓                      ↓

Ahora se destruyen los corchetes [ ]

$$+ \{m + (m+p)\}$$

$$- \{m + (m+p)\}$$

Luego se eliminan las llaves

Y por último se reducen los términos semejantes:

$$-m + n + 2p$$

## 2.4

### Multiplicación

**L**a multiplicación algebraica es una operación que al igual que en la aritmética, tiene por objeto hallar el producto de dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador. Para representar una multiplicación se usan los signos de  $\times$ ,  $\cdot$  o  $( ) ( )$ , generalmente en álgebra se usan las dos últimas.

Ejemplo, la siguiente multiplicación se puede representar como:

$$5x^3 \times 3x^8 \quad \text{ó} \quad 5x^3 \cdot 3x^8 \quad \text{ó} \quad (5x^3)(3x^8)$$

La forma para solucionar esta multiplicación es:

⇒

Multiplicar los signos de estos factores, en este caso,  $5x^3 \cdot 3x^8$  ambos son  $+$ , porque en ninguno aparece el signo y cuando esto sucede se sobreentiende que es  $+$ .

Luego multiplicar los coeficientes  $5 \cdot 3 = 15$

Enseguida multiplicar las bases, recordando las propiedades de la potenciación  $x^3 \cdot x^8 = x^{3+8} = x^{11}$

Entonces el resultado es  $15x^{11}$

Es importante recordar las reglas de multiplicación de los signos:

$(+) \cdot (+) = (+)$
$(+) \cdot (-) = (-)$
$(-) \cdot (+) = (-)$
$(-) \cdot (-) = (+)$

Ejemplo: realizar la siguiente operación:

$$(3a^3)(-7a^2)$$

Primero se multiplican los signos en este caso:  $(+) (-) = -$

Luego se multiplican los coeficientes:  $(3)(7) = 21$

En seguida las bases  $(a^3)(a^2) = a^5$

Entonces el resultado es

$-21a^5$
----------

# Ejercicios

## resueltos

1. Resolver  $(-4m^5)(12m)$

Primero se multiplican los signos:  $(+)(-) = -$

Luego se multiplican los coeficientes:  $(4)(12) = 48$

Enseguida las variables:  $(m^5)(m) = m^{5+1} = m^6$

Entonces el resultado es:

$$\boxed{-48m^6}$$

2. Multiplicar:  $(-x^a)(-x^{a+1})$

Primero se multiplican los signos:  $(+)(-) = +$

Luego se multiplican los coeficientes:  $(1)(1) = 1$

Recordemos que cuando no aparecen coeficientes se sobreentiende que es 1. Enseguida se multiplican las bases. Cuando se multiplican potencias con bases iguales, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$(-x^a)(-x^{a+1}) = x^{a+a+1} = x^{2a+1}$$

Entonces el resultado es:

$$\boxed{x^{2a+1}}$$

3. Realizar la siguiente operación:

Primero multiplicación de signos: (+) ( - ) = -

Luego se multiplican los coeficientes: no debemos olvidar que para multiplicar números fraccionarios, se multiplican los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores:

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \text{Simplificando} = \boxed{-\frac{2}{5}}$$

Enseguida se multiplican las bases:

$$(x^2 y^3)(a^2 x^4 y) = x^{2+4} y^{3+1} a^2 = \boxed{x^6 y^4 a^2}$$

El resultado es:

$$\boxed{-\frac{2}{5} x^6 y^4 a^2}$$

$$\left(\frac{2}{3} x^2 y^3\right) \left(-\frac{3}{5}\right)$$

4. Efectuar la siguiente operación:  $(3a^2)(-a^3b)(-2x^2a)$

Se multiplican los signos, en este caso son tres entonces se multiplica el primero por el segundo y el resultado de este se multiplica por el tercero:

+ . - =  $\boxed{-}$  y ahora este resultado se multiplica por el signo del tercero - . - =  $\boxed{+}$

Resumiendo:  $(+) (-) (-) = +$

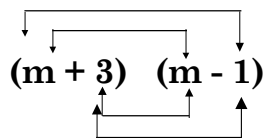
Luego se multiplican los coeficientes:  $(3)(1)(2) = 6$

Enseguida las bases:  $(a^2)(a^3b)(x^2a) = a^{2+3+1}bx^2 = a^6bx^2$

Entonces el resultado es:  $6a^6bx^2$

5. Multiplicar:  $(m + 3)(m - 1)$

En este caso se multiplican los dos términos del primer factor  $(m+3)$  por los dos los términos del segundo factor  $(m - 1)$ , entonces:



$$(m + 3)(m - 1) = m \cdot m - m \cdot (1) + 3 \cdot m - 3 \cdot (1) = m^2 - m + 3m - 3 =$$

$$= m^2 + 2m - 3$$

## 2.5

## División

**A**ntes de iniciar la división algebraica, es necesario repasar las reglas para la división de los signos:

$$(+)\div(+)=(+)$$

$$(+)\div(-)=(-)$$

$$(-)\div(+)=(-)$$

$$(-)\div(-)=(+)$$

También es importante recordar cuáles son las partes de una división.

Si se tiene:  $28 \div 7 = 4$

$\Rightarrow$  28 es el **dividendo**, o sea la cantidad que ha de dividirse.  $\Rightarrow$

7 es el **divisor**, se refiere a la cantidad que divide.

4 es el **cociente**, resultado que se obtiene al realizar la división.

0 es el **residuo**, en este caso es cero porque la división es exacta, es decir si una división es exacta, su residuo es cero (0).

## Repasemos

Para dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se coloca como exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

# Ejercicios

## resueltos

1. Realizar

2. Dividir  $24a^7 \div 6a^2$

Para llevar a cabo esta división algebraica primero se dividen los signos, luego coeficientes y por último las bases:

$$a^8 \div a^3 = a^{8-3} = a^5$$

Primero se dividen los signos:  $(+) \div (+)$

Luego se dividen los coeficientes  $24 \div 6 = 4$

En seguida se dividen las bases  $a^7 \div a^2 = a^{7-2} = a^5$

El resultado de esta división es:  $4a^5$

3. Dividir  $(x^3 + x - 4x^2) \div x$

En este caso se divide cada uno de los términos del dividendo por el divisor así:

$$x^3 \div x = x^{3-1} = x^2$$

$x \div x = x^{1-1} = x^0 = 1$  recordando que la potencia de cualquier base elevada al exponente cero(0) es igual a uno (1).

$$-4x^2 \div x = -4x^{2-1} = -4x$$

Entonces el resultado es:                      ordenando queda

Otra forma de presentar esta división es:




El resultado es:

4. Dividir:

Para dividir dos polinomios es necesario seguir los siguientes pasos, los cuales son similares a los de una división aritmética.

⇒ Se ordenan los polinomios colocando una de las letras en orden descendente de sus exponentes:

$$a^2 + a - 20 \quad | \quad a - 4$$

⇒ El primer término del dividendo ( $a^2$ ) se divide por el primer término del divisor ( $a$ ) y el resultado de éste corresponde al primer término del cociente:

$$\textcircled{a^2} + a - 20 \quad | \quad \textcircled{a} - 4$$

$$a^2 \div a = a$$

$$\frac{(a^2 + 20a + 4a^2)}{x} \div \frac{a^2 + 20a + 4a^2}{x}$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

$$\frac{-4x^2}{x} = -4x$$

Entonces:

$$\begin{array}{r} \textcircled{a^2} + a - 20 \quad | \quad \textcircled{a} - 4 \\ \underline{\phantom{a^2} a} \phantom{- 20} \\ \phantom{a^2} 0 \phantom{- 20} \end{array}$$

⇒ Se multiplica el primer término del cociente ( $a$ ) por cada uno de los términos del divisor y este producto se resta de cada uno de los términos semejantes del dividendo.

$$\begin{array}{r} a^2 + a - 20 \quad | \quad a - 4 \\ \underline{-a^2 + 4a} \phantom{- 20} \\ 0 + 5a - 20 \end{array}$$

Porque  $a \cdot a = a^2$  este valor se le resta al primer término del dividendo  
 $a \cdot (-4) = -4a$  este valor se le resta al segundo término.

El primer término del nuevo dividendo se divide por el divisor y se repite las operaciones de multiplicar el cociente por el divisor y restarle este producto al dividendo.

$$\Rightarrow (a-4) \cdot a^2 - 20$$

$$\begin{array}{r} a^2 + a - 20 \quad | \quad a - 4 \\ \underline{-a^2 + 4a} \phantom{- 20} \\ 0 + 5a - 20 \\ \underline{-5a + 20} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

Porque  $5 \cdot a = 5a$  este valor se le resta al nuevo dividendo  
 valor que también se le resta al dividendo.

Se repite la operación hasta que el residuo es cero o no se pueda dividir más.

5. Dividir  $2a^3 - 2 - 4a$  entre  $2 + 2a$

**Paso 1 organización:**

$$2a^3 - 4a \overline{) - 2 \quad 2a + 2}$$

Es importante resaltar que en el dividendo, el exponente con mayor exponente es  $a^3$ , le seguiría en orden descendente  $a^2$ , pero en este caso no existe, razón por la cual se coloca un cero (0) en el espacio que le correspondería. Así mismo, como se ordenó el dividendo también se ordenan los términos del divisor:

**Paso 2:**

$$\begin{array}{r} 2a^3 + 0 - 4a - 2 \quad \overline{) 2a + 2} \\ -2a^3 - 2a^2 \phantom{- 4a - 2} \\ \hline 0 - 2a^2 - 4a - 2 \end{array}$$

Porque

$$2a^3 \div 2a = a^2$$

$a \cdot 2a = 2a^3$  Este valor se le resta al primer término del dividendo

$a^2 \cdot 2 = 2a^2$  Este se le resta al segundo término (0) del dividendo

**Paso 3, 4 y 5**

$$\begin{array}{r} 2a^3 + 0 - 4a - 2 \quad \overline{) 2a + 2} \\ -2a^3 - 2a^2 \phantom{- 4a - 2} \\ \hline 0 - 2a^2 - 4a - 2 \\ \phantom{0} 2a^2 + 2a \\ \hline 0 - 2a - 2 \\ \phantom{0} + 2a - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

6. Dividir  $\frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{10}ab - \frac{1}{3}b^2$  entre  $a - \frac{2}{5}b$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{10}ab - \frac{1}{3}b^2 \quad \left| \quad a - \frac{2}{5}b \right. \\
 \underline{-\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{15}ab} \qquad \qquad \frac{1}{3}a \\
 0 \quad +\frac{5}{6}ab - \frac{1}{3}b^2
 \end{array}$$

Porque:  $\frac{1}{3}a^2 \div a = \frac{1}{3}a$

$\frac{1}{3}a \cdot a = \frac{1}{3}a^2$  este valor se le resta al primer término del dividendo

$\left(\frac{1}{3}a\right) \left(-\frac{2}{5}b\right) = -\frac{2}{15}ab$  valor que se le resta al segundo término del dividendo

Para multiplicar fraccionarios se multiplica  
 numerador por numerador  
 y denominador por denominador.

Al realizar la suma de estos términos:

Para sumar o restar fraccionarios no homogéneos primero se halla el denominador común y luego este denominador se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y este resultado se multiplica por su respectivo numerador.

$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = 0$$

$\frac{7}{10}ab + \frac{2}{15}ab$  Como se trata de fraccionarios no homogéneos, se busca el denominador común, en este caso ese denominador es 30

$$\frac{(30 \div 10)7ab + (30 \div 15)(2)(ab)}{30} = \frac{(21+4)}{30}ab = \frac{25}{30}ab \text{ simplificando: } \frac{25 \div 5}{30 \div 5}ab = \frac{5}{6}ab$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{3}a^2 + \frac{7}{10}ab - \frac{1}{3}b^2 & a - \frac{2}{5}b \\ -\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{15}ab & \frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b \\ \hline 0 + \frac{5}{6}ab - \frac{1}{3}b^2 & \\ -\frac{5}{6}ab - \frac{1}{3}b^2 & \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

# Ejercicios

## propuestos

Realizar las siguientes divisiones:

1.  $(m^2 - mn) \div (m)$

2.  $(4a^8 - 10a^6 - 5a^4) \div (2a^3)$

3.  $(x^4 - x^6 - 2x - 1) \div (x^2 - x - 1)$

4.  $(3m^3n - 5mn^3 + 3n^4 - m^4) \div (m^2 - 2mn + n^2)$

5.  $\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{36}xy - \frac{1}{6}y^2\right) \div \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y\right)$

Si tiene dudas consulte con el tutor.

## 2.6

### Productos notables

**L**os productos notables son productos que satisfacen algunas reglas y su resultado puede ser hallado por simple inspección, sin tener que realizar la operación, lo que agiliza cualquier operación.

#### 2.6.1 Binomios

Recordando que  $a^2 = a \cdot a$  es decir que la base **a** se repite las veces que indica el exponente, en este caso es 2 veces, entonces:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

**A**

El cuadrado de la suma de dos cantidades  $(a+b)^2$  es igual al cuadrado del primer término ( $a^2$ ), más dos veces el primero por el segundo ( $2ab$ ), más el segundo al cuadrado ( $b^2$ ).

# Ejercicios

## resueltos

Hallar por simple inspección:

$$1. (5 + m)^2 = (5)^2 + 2 \cdot 5 \cdot m + (m)^2 = \boxed{25 + 10m + m^2}$$

Explicación

$$\text{Cuadrado del primer término } (5)^2 + 5 \cdot 5 = 25$$

$$2. (4xy^2)(3xy^3) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x \cdot xy^2y^3 = 24x^2y^5$$

Dos veces el primero por el segundo =  $2 \cdot 5 \cdot m = 10m$

$$\text{Cuadrado del segundo término } = (m)^2 = m \cdot m = m^2$$

$$2. (4xy^2 + 3xy^3)^2 = (4xy^2)^2 + 2 \cdot (4xy^2) \cdot (3xy^3) + (3xy^3)^2 =$$

$$\boxed{16x^2y^4 + 24x^2y^5 + 9x^2y^6}$$

Explicación:

Cuadrado del primer término

$$(4xy^2)^2 = 4^2 x^2 y^{2 \cdot 2} = 4^2 x^2 y^4 = 16x^2y^4$$

Dos veces el primero por el segundo

Cuadrado del segundo término

$$(3xy^3)^2 = 3^2 x^2 y^{3 \cdot 2} = 9x^2 y^6$$

Cuando se trata del cuadrado de la diferencia de dos cantidades

$(a - b)^2$  resultado es el siguiente:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

La única diferencia con el cuadrado de la suma de dos cantidades es el signo del segundo término, que en este caso es negativo (-) entonces:

**A**

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades  $(a - b)^2$  es igual al cuadrado del primer término ( $a^2$ ), menos dos veces el primero por el segundo ( $2ab$ ), más el segundo al cuadrado ( $b^2$ ).

Hallar por simple inspección:

$$3. (x - 7)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$$

Explicación:

$$\text{Cuadrado del primer término} = (x)^2 = x \cdot x = x^2$$

$$\text{Dos veces el primero por el segundo} = 2(x)(-7) = -14x$$

$$\text{Cuadrado del segundo término} = (7)^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

$$4. (4a - b)^2 = (4a)^2 - 2(4a)(3b) + (3b)^2 = \boxed{16a^2 - 24ab + 9b^2}$$

Hasta ahora se ha trabajado el cuadrado de la suma de dos cantidades  $(a \pm b)^2$ , ahora analizaremos el cubo de la suma de dos cantidades  $(a + b)^3$  entonces:

$$\boxed{(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

El cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo del primer término ( $a^3$ ) más el triplo del cuadrado del primer término multiplicado por el segundo ( $3a^2b$ ), más el triplo del primer término multiplicado por el cuadrado del segundo ( $3ab^2$ ), más el segundo término al cubo ( $b^3$ ).

Es importante resaltar que el primer término inicia con el exponente tres ( $a^3$ ), en el segundo término este término desciende un grado ( $a^2$ ) y aparece el segundo término ( $b$ ), en el tercero sigue descendiendo el primer término ( $a$ ) y el segundo continúa creciendo ( $b^2$ ) y en el cuarto el primer término del binomio desaparece y el segundo llega hasta ( $b^3$ ).

$$5. (3n + 5m)^3 = (3n)^3 + 3(3n)^2(5m) + 3(3n)(5m)^2 + (5m)^3 =$$

$$\boxed{27n^3 + 135n^2m + 225nm^2 + 125m^3}$$

Explicación: cubo del primer término:  $(3n)^3 = 3^3 n^3 = 27n^3$

Triplo del cuadrado del primer término por el segundo:

$$3(3n)^2(5m) = 3 \cdot 3^2 \cdot n^2 \cdot 5m = 135n^2m$$

Triplo del primer término por el cuadrado del segundo:

$$3(3n)(5m)^2 = 3 \cdot 3 \cdot n \cdot 5^2 \cdot m^2 = 225nm^2$$

Cubo del segundo término=  $(5m)^3 = 5^3 m^3 = 125m^3$

$$6. (4a + 3)^3 = (4a)^3 + 3(4a)^2(3) + 3(4a)(3)^2 + (3)^3 =$$

$64a^3 + 144a^2 + 108a + 27$
------------------------------

Explicación: cubo del primer término=

$$(4a)^3 = 4^3 a^3 = 64a^3$$

Triplo del cuadrado del primer término por el segundo=

$$3(4a)^2(3) = 3 \cdot 4^2 \cdot a \cdot 3 = 144a^2$$

Triplo del primer término por el cuadrado del segundo=

$$3(4a)(3)^2 = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot 3^2 = 108a$$

Cubo del segundo término=

$$(3)^3 = 3^3 = 27$$

$$7. (t - 4)^3 = t^3 - 3(t^2)(4) + 3(t)(4)^2 - 4^3 = \boxed{t^3 - 12t^2 + 48t - 64}$$

Explicación: cubo del primer término =  $t^3$

Triplo del cuadrado del primer término por el segundo =

$$3 \cdot t^2 \cdot 4 = 12t^2$$

Triplo del primer término por el cuadrado del segundo =

$$3 \cdot t \cdot 4^2 = 48t$$

Cubo del segundo término =

$$4^3 = 64$$

**A** Se observa que la única diferencia entre el cubo de la suma de un binomio  $(a+b)^3$  y el cubo de la diferencia de un binomio  $(a-b)^3$  son los signos, porque en la suma todos los términos son positivos, mientras que en la diferencia se combinan, es decir, el primero es positivo, el segundo negativo, el cuarto positivo y el último negativo.

Matemáticamente, la forma general de un producto notable se puede expresar como:  $(a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$   $n$  veces.

El producto de estas bases se puede resumir así:  $(a+b)^n$   $n \in \mathbb{Z}^+$   
 Esto significa que  $n$  puede tomar los valores: 0, 1, 2, 3, ...

La expresión  $(a+b)^n$  se ve como un Binomio elevado a la  $n$ , lo que indica que los productos notables son BINOMIOS con exponente  $n$ .

$$\vec{n} = 0 \quad (a+b)^0 = 1$$

Entonces cuando:

$\Rightarrow$  Por definición de potencias

$$n = 1 \quad (a+b)^1 = (a+b) \quad \text{Propiedad de la potenciación}$$

$$n = 2 \quad (a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$n = 3 \quad (a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

¿Pero qué pasa si  $n$  tiene valores superiores a estos?

Para dar solución a estos casos se puede acudir a dos métodos: **Binomio de Newton y el Triángulo de pascal,**

- A** **BINOMIO DE NEWTON**
- Dado el binomio  $(a+b)^n$
- El número de términos del polinomio es de  $n+1$
  - El primer término del polinomio será  $a^n$
  - El último término del polinomio será  $b^n$
  - Cuando el binomio tiene signo positivo, todos los términos del polinomio serán positivos
  - Si el signo del binomio es negativo, los signos del polinomio van intercalados, empezando por el signo positivo

Por ejemplo  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- El número de terminos del polinomio será igual a  $n + 1 = 3 + 1 = 4$
- El primer término del polinomio será  $a^3$
- El último término del polinomio será  $b^3$

La fórmula general, conocida como la LEY DEL BINOMIO, descubierta por Newton es:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \dots + (-b)^n$$

Ejemplos:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^{4-1}b + \frac{4(4-1)}{1.2}a^{4-2}b^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3}a^{4-3}b^3 + b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

En el ejemplo podemos observar que a medida que el exponente del primer término va disminuyendo desde el valor de  $n$ , el exponente del segundo término del Binomio va aumentando desde cero hasta  $n$ .

$$\Rightarrow (x-y)^5 = x^5 - 5x^{5-1}y + \frac{5(5-1)}{1.2}x^{5-2}y^2 - \frac{5(5-1)(5-2)}{1.2.3}x^{5-3}y^3 +$$

$$\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1.2.3.4}x^{5-4}y^4 - y^5 =$$

$$x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

## Triángulo de Pascal

Una forma fácil para obtener LOS COEFICIENTES del polinomio, es utilizando el triángulo de Pascal. Este se construye de la siguiente manera:



$$\Rightarrow (2x + 4)^5$$

Los coeficientes para  $n = 5$  son: 1, 5, 10, 10, 5, 1. Entonces:

### 2.6.2 Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$1(2x)^5 4^0 + 5(2x)^4 4^1 + 10(2x)^3 4^2 + 10(2x)^2 4^3 + 5(2x)^1 4^4 + 1(2x)^0 4^5 =$$

$$32x^5 + 328x^4 + 1280x^3 + 2560x^2 + 2560x + 1024$$

**A** La suma de dos cantidades  $(a + b)$  multiplicada por la diferencia de estas mismas cantidades  $(a - b)$ , es igual al cuadrado del primer término  $(a)^2$  menos el cuadrado del segundo término  $(b)^2$ .

# Ejercicios

## resueltos

Escribir por simple inspección el resultado de las siguientes expresiones:

$$8. (2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - (1)^2 = \boxed{4x^2 - 1}$$

Explicación:

$$\text{Cuadrado del primer término: } (2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$$

$$\text{Cuadrado del segundo término: } 1^2 = 1$$

$$9. (6m^2 - a^2m)(6m^2 + a^2m) = (6m^2)^2 - (a^2m)^2 = \boxed{36m^4 - a^4m^2}$$

Explicación:

Cuadrado del primer término:

$$\text{Cuadrado del segundo término: } (a^2m)^2 = a^{2 \cdot 2} m^2 = a^4 m^2$$

$$(6m^2)^2 = 6^2 m^4$$

### 2.6.3 Producto de dos binomios

Si se tiene:

$$(x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = \boxed{x^2 + 8x + 15}$$

Con este ejemplo nos podemos dar cuenta que en lugar de realizar toda la multiplicación se puede obtener el resultado aplicando la siguiente regla:

Cuando se tiene el producto de dos binomios, de la forma  $(x+a)(x+b)$ , el resultado es igual al producto del primer término de los binomios, esto es,  $x^2$ ; más el producto del primer término por la suma algebraica de los segundo términos, es decir,  $x(a + b)$ ; más el producto de los segundos entre sí, **a.b.**

$$\text{Entonces } (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$$

# Ejercicios

## resueltos

Resolver por simple inspección los siguientes ejercicios:

$$10. (x + 5)(x - 2) = \boxed{x^2 + 3x - 10}$$

### Explicación:

Multiplicación de los primeros términos de cada uno de los binomios

$$x \cdot x = x^2$$

Producto del primer término por la suma algebraica de los segundos términos  $(5 - 2)x = 3x$

Multiplicación de los dos segundos términos de los binomios

$$(5 \cdot -2) = -10$$

$$11. (a - 6)(a - 5) = \boxed{a^2 - 11a + 30}$$

### Explicación:

Multiplicación de los primeros términos de cada uno de los binomios

$$a \cdot a = a^2$$

Producto del primer término por la suma algebraica de los segundos términos

$$(-6 - 5)a = -11a$$

Multiplicación de los dos segundos términos de los binomios

$$(-6 \cdot -5) = 30$$

$$12. (m^6 + 7)(m^6 - 9) = \boxed{m^{12} - 2m^6 - 63}$$

Explicación:

Multiplicación de los primeros términos de cada uno de los binomios

$$m^6 \cdot m^6 = m^{6+6} = m^{12}$$

Producto del primer término ( $m^6$ ) por la suma algebraica de los segundos términos

$$(7 - 9)m^6 = -2m^6$$

Multiplicación de los dos segundos términos de los binomios

$$(7 \cdot -9) = -63$$

$$13. (xy^2 - 3)(xy^2 + 4) = \boxed{x^2y^4 + xy^2 - 12}$$

Explicación:

Multiplicación de los primeros términos de cada uno de los binomios

$$xy^2 \cdot xy^2 = x^{1+1} y^{2+2} = x^2y^4$$

Producto del primer término ( $xy^2$ ) por la suma algebraica de los segundos términos

$$(-3 + 4)xy^2 = 1xy^2 = xy^2$$

Multiplicación de los dos segundos términos de los binomios

$$(-3 \cdot 4) = -12$$

# Autoevaluación

## 5

**Productos notables.** Desarrollar los siguientes binomios por el método de Binomio de Newton.

1.  $(p - q)^3$

2.  $(a + 3)^3$

3.  $(5x - 3y)^4$

4.  $([x - 2] - y)^3$

Desarrollar los siguientes potencias por el método del triángulo de pascal.

5.  $(t - 4)^3$

6.  $(2t + 3s)^4$

7.  $([x - 1] - [y - 2])^3$

8.  $(x - 3y)^5$

Resolver los siguiente ejercicios por simple inspección:

9.  $(a + 2)(a + 7)$

10.  $(m + 8)(m - 8)$

11.  $(m^2 + 4)(m^2 - 4)$

**A** l igual que los productos notables, existen cocientes que cumplen reglas fijas y que su resultado puede ser escrito por simple inspección, sin realizar toda la operación

$$\Rightarrow \frac{a^2 - 4}{a + 2} = a - 2 \quad \text{porque } (a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$$

**A** Para probar una división se multiplican el divisor por el cociente y a este producto se le suma el residuo. El resultado de esta operación debe ser igual al dividendo.

De este ejemplo se puede concluir que la diferencia de los cuadrados de dos términos, en este caso  $(a^2 - 4)$ , dividida por la suma de las cantidades  $(a + 2)$  es igual a la diferencia de las cantidades:

$$\Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$$

En este caso la diferencia de los cuadrados de dos términos dividida por la diferencia de las cantidades es igual a la suma de las cantidades.

$$\Rightarrow \frac{25m^2 - 36n}{5m - 6n} = 5m + 6n$$

Ahora analizaremos el siguiente ejercicio:

$$\Rightarrow \frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

Como se observa, los dos términos del numerador están elevados al exponente 5 y como denominador están las bases de éste numerador.

En este caso el primer término del cociente (o resultado de esta división) es igual al primer término de las bases elevado a un grado menos del que tiene el numerador  $(x^4)$ , más el mismo término elevado a un grado menos multiplicado por el segundo término  $(x^3y)$ , más el primer término con un grado menos multiplicado por el segundo término aumentado en un grado  $(x^2y^2)$ , más el primer término elevado al exponente (1) por la segunda base elevado al siguiente grado  $(xy^3)$ , más el segundo término elevado a un grado inferior del dividendo  $(y^4)$ .

De este ejemplo se puede concluir que:

**A** La diferencia de potencias iguales, ya sean pares o impares se puede dividir por la suma o diferencia de sus bases y el resultado se empieza por un grado menos de las potencias del dividendo, el siguiente término va descendiendo de grado y el segundo término va aumentando hasta completar un grado menos del dividendo.

$$\Rightarrow \frac{m^6 - 64}{m + 2} = m^5 - (m^4)(2) + (m^3)(2^2) - (m^2)(2^3) + m \cdot 2^4 - 2^5$$

$$\text{organizando} \quad = m^5 - 2m^4 + 4m^3 - 8m^2 + 16m - 32$$

Es de resaltar que cuando el denominador es una suma, los signos se combinan, es decir el primer término de este resultado es positivo, el segundo negativo, el tercero positivo y así sucesivamente. Cuando el numerador es una diferencia todos los signos del resultado son positivos.

Para el caso de suma de potencias iguales impares se puede proceder de la misma manera que lo planteado anteriormente, porque esta suma es siempre divisible por la suma o diferencias de sus bases.

La **diferencia** de potencias iguales, ya sean **pares** o **impares**, es siempre divisible por la **diferencia** de sus bases

$$\frac{X^2 - Y^2}{X - Y} \quad \text{ó} \quad \frac{X^3 - Y^3}{X - Y}$$

La **diferencia** de potencias iguales **pares** es siempre divisible por la **suma** de las bases

$$\frac{X^2 - Y^2}{X + Y}$$

La **suma** de las potencias iguales **impares** es siempre divisible por la **suma** de las bases

$$\frac{X^3 + Y^3}{X + Y}$$

La **suma** de las potencias iguales **pares** **NUNCA** es divisible por la **suma** ni por la **diferencia** de las bases

$$\frac{X^2 + Y^2}{X - Y} = \text{no es una división exacta}$$

# Ejercicios

## resueltos

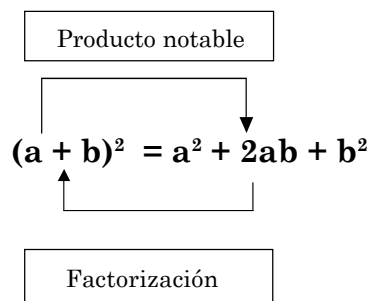
$$1. \frac{8x^3 - 27y^3}{2x + 3y} = (2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 6xy + 9y^2$$

$$2. \frac{a^6 + b^6}{a + b} \text{ no se puede realizar porque la } \mathbf{\textit{suma de potencias pares}}$$

no son divisibles por la suma o diferencia de sus bases.

**C**onsiste en presentar un polinomio en factores. La factorización es el paso contrario a los productos notables. Este proceso es muy útil para simplificar fracciones.

Para llevar a cabo una factorización es necesario aprender ciertas reglas, las cuales están relacionadas con los productos notables.



O sea que en la factorización se parte del resultado de un producto notable  $(a^2 + 2ab + b^2)$  para llegar a  $(a + b)^2$

A continuación se relacionan los casos más importantes de factorización:

### 2.8.1 Factor común

Sea  $x^2 + 2x$

En esta expresión algebraica se observa que  $x$  está en los dos términos, o sea que es común. Para llevar a cabo una factorización de este tipo, se selecciona el término común con el menor exponente, en este caso  $x$ , luego este término se coloca como coeficiente de un paréntesis  $x$  (). Dentro del paréntesis se coloca el resultado de dividir cada uno de los términos dados por el factor común,  $(x^2+2x) \div x = x + 2$ , entonces la factorización queda:

$$x(x + 2)$$

# Ejercicios

## resueltos

$$1. m^2 + 5mn + 3m = m(m + 5n + 3)$$

### Explicación:

La letra  $m$  está contenida en  $m^2$ ; en  $5mn$  y en  $3m$  y la de menor exponente es  $m$ .

El resultado de dividir  $m^2 \div m = m$

$$5mn \div m = 5n$$

$$3m \div m = 3$$

$$2. 2a^2b + 6ab^2 = 2ab(a + 3b)$$

### Explicación:

Cuando existen coeficientes numéricos es necesario descomponerlos, en este caso  $2 = 2 \cdot 1$  y  $6 = 3 \cdot 2$ , entonces

$$2a^2b + 6ab^2 = 2a^2b + 3 \cdot 2ab^2$$

$2$  está en los dos términos

$a$  es común y es la de menor exponente

$b$  también es común y es el de menor exponente

Entonces el factor común es  $2ab$ .

Los términos que van dentro del paréntesis son:

$$2a^2b \div 2ab = a$$

$$3 \cdot 2a^2b \div 2ab = 3b$$

$$3. \quad x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$$

**Explicación:**

La letra x está en todos los tres términos y es la de menor exponente entonces este es el factor común.

Los términos que van dentro del paréntesis son:

$$x^3 \div x = x^2$$

$$x^2 \div x = x$$

$$x \div x = 1$$

$$4. \quad 15c^3 + 20c^2 - 5c = 5c(3c^2 + 4c - 1)$$

**Explicación:**

Descomponiendo los números:  $15 = 5 \cdot 3$

$$20 = 5 \cdot 2^2$$

$$5 = 5 \cdot 1$$

De lo anterior se observa que el número  $\boxed{5}$  está contenido en (15, 20 y 5) entonces 5 es un factor común.

Con relación a las letras, la  $\boxed{c}$  está en todos los términos y es la de menor exponente. Entonces el factor común es  $\boxed{5c}$ .

Los términos que van dentro del paréntesis:

$$5. \quad a^{24} - a^{18} + a^{15} - a^{10} + a^6 - a^3 = a^3 (a^{21} - a^{15} + a^{12} - a^7 + a^3 - 1)$$

**Explicación:**

La letra ***a*** está en todos los términos pero la de menor exponente es ***a*<sup>3</sup>**, entonces este es el factor común.

Los términos que van dentro del paréntesis:

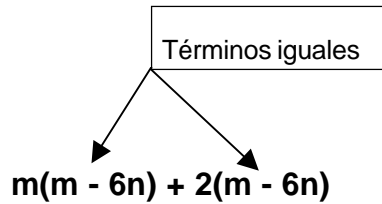
$c^3 \div 5c = 3c^2$	$a^{24} \div a^3 = a^{21}$
$20c^2 \div 5c = 4c$	$a^{18} \div a^3 = a^{15}$
$5c \div 5c = 1$	$a^{15} \div a^3 = a^{12}$
	$a^{10} \div a^3 = a^7$
	$a^6 \div a^3 = a^3$
	$a^3 \div a^3 = a^1$

$$6. \quad m^2 - 6mn + 2m - 12n$$

En este caso no hay un término que esté común en todos, ejemplo ***m*** está en los tres primeros términos pero no está en el último, mientras que ***n*** está en el segundo y cuarto, entonces se pueden agrupar en dos paréntesis.

$$(m^2 - 6mn) + (2m - 12n)$$

Ahora cada uno de estas agrupaciones se factorizan independientemente:



Como se observa, el término  $(m - 6n)$  está en los dos términos, entonces se coloca como factor común y al igual que en los ejemplos anteriores, cada uno de estos términos se divide por el factor común, con el fin de hallar los términos que están dentro del paréntesis:

$$m(m - 6n) \div (m - 6n) = m$$

$$2(m - 6n) \div (m - 6n) = 2$$

Entonces la factorización queda:  $(m - 6n)(m + 2)$

7.  $a + a^2 - ab^2 - b^2$

Es de aclarar que la agrupación se puede hacer de diferentes maneras, ejemplo:

$$(a - b^2) + (a^2 - ab^2)$$

Ahora se factorizan cada uno de estos términos en forma independiente:

El primer término  $(a - b^2)$  no tiene ningún término común, entonces se deja igual.

El segundo término  $(a^2 - ab^2)$  tiene como factor común  $a$ , entonces esta factorización queda:  $a(a^2 - b^2)$

$$(a - b^2) + a(a - b^2)$$

La expresión  $(a - b^2)$  está en los dos términos o sea que es el factor común y los términos que van dentro del paréntesis son:

$$(a - b^2) \div (a - b^2) = 1$$

$$a(a - b^2) \div (a - b^2) = a$$

Entonces la factorización completa queda:

$$(a - b^2)(1 + a)$$

$$8. \quad x + y^2 - 2mx - 2my^2$$

Agrupando:

$$(x + y^2) - (2mx + 2my^2)$$

**A** Recordando que para la eliminación de un paréntesis, si está precedido por el signo negativo (-), todos los términos que están dentro del paréntesis cambian de signo.

En este caso, al agrupar el segundo término este queda precedido por el signo negativo, entonces se le hizo el cambio de signos a todo lo que estaba dentro del paréntesis, por eso  $-2mx$  queda convertido en  $2mx$  y  $-2my^2$  se convierte en  $+2my^2$ .

Ahora se factorizan independientemente cada uno.

$$(x + y^2) - 2m(x + y^2)$$

El factor  $(x + y^2)$  está en los dos términos, entonces este es un factor común.

Los términos que van dentro del paréntesis son:

$$(x + y^2) \div (x + y^2) = 1$$

$$2m(x + y^2) \div (x + y^2) = 2m$$

Entonces la factorización queda:

$$(x + y^2)(1 - 2m)$$

### 2.8.2 Diferencia de cuadrados perfectos

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

El proceso para esta factorización consiste en extraerle la raíz cuadrada a cada uno de los términos de la diferencia de cuadrados ( $a^2 - b^2$ ), o sea que las raíces son:  $(a$  y  $b)$ , y la suma de estas raíces  $(a + b)$  se multiplica por la diferencia de las raíces  $(a - b)$ .

9. Factorizar:  $81 - m^2$

$$\begin{array}{cc} 81 & - & m^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 9 & & m \end{array} \quad \boxed{\text{Raíces}}$$

Luego la suma de las raíces se multiplican por la diferencia de estas raíces.  $(9 + m)(9 - m)$

10.  $25x^2y^4 - 169$

$$\begin{array}{ccc} 25x^2y^4 & - & 169 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 5xy^2 & & 13 \end{array}$$

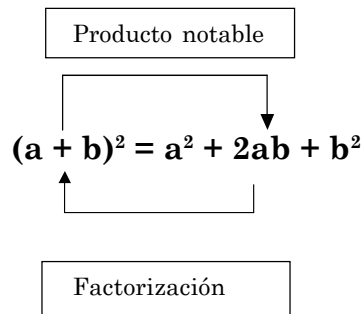
Entonces el resultado de esta factorización es:  $(5xy^2 + 13)(5xy^2 - 13)$

### 2.8.3 Trinomios

Cuando se tiene un trinomio, lo primero que se verifica es si tiene un factor común y si lo tiene se realiza de la misma manera que se trabajó anteriormente, pero si no tiene ningún factor común, se puede llevar a cabo el siguiente proceso:

#### Trinomio cuadrado perfecto

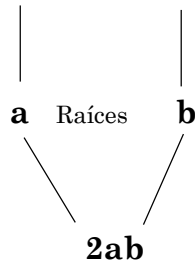
Recordando los productos notables:



En el trinomio cuadrado perfecto se parte de  $a^2 + 2ab + b^2$  para llegar a  $(a + b)^2$

La forma de establecer si se trata de un trinomio cuadrado perfecto es:

$$a^2 + 2ab + b^2$$



Duplo del producto  
de las raíces

- A** Primero se ordena con relación a una letra, luego se sacan las raíces cuadrados de los extremos (es decir de los términos que están al cuadrado), en este caso las raíces son  $a$  y  $b$ , luego estas raíces se multiplica por el número 2 y si el producto de esta operación es igual al del segundo término del trinomio, se comprueba que se trata de un **trinomio cuadrado perfecto** y la factorización de este tipo de trinomios es igual a la suma o diferencia de las dos raíces elevadas el cuadrado.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

# Ejercicios

## resueltos

11. Factorizar:

$$b^4 + 1 + 2b^2$$

Primero se ordenan con relación a la letra b, quedando:

$$b^4 + 2b^2 + 1$$

Ahora se sacan las raíces de los extremos, estas son ( $b^2$  y 1)

Luego se halla el duplo de la multiplicación de estas dos raíces:

$2 \cdot b^2 \cdot 1 = 2b^2$ . Este producto es igual al segundo término del trinomio, con esto se comprueba que es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización es igual a la suma de las raíces elevada al cuadrado

$$(b^2 + 1)^2$$

12. Factorizar  $x^2 - 12x + 36$

Ya está ordenado, ahora se verifica si es un trinomio cuadrado perfecto. Se hallan las raíces de los extremos, en este caso son (x y 6) y el producto de estas raíces se multiplica por dos (2):  $x \cdot 6 \cdot 2 = 12x$ , este último valor se compara con el segundo término del trinomio y se verifica que es igual. Sin embargo, el signo de este segundo término

es negativo, razón por la cual la factorización queda como la diferencia de las raíces elevada al cuadrado.

$$\boxed{(x - 6)^2}$$

13. Factorizar  $\frac{1}{25} + \frac{25a^4}{36} - \frac{a^2}{3}$

Ordenando queda:

$$\frac{1}{25} - \frac{a^2}{3} + \frac{25a^4}{36}$$

Las raíces de los extremos son:  $\left(\frac{1}{5} \text{ y } \frac{5a^2}{6}\right)$

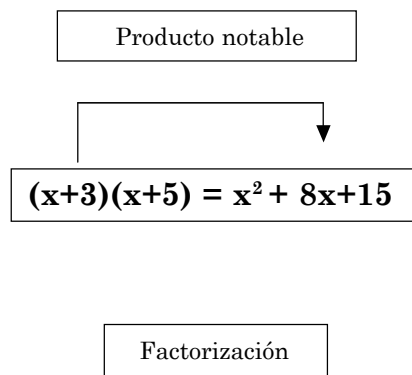
Ahora el producto de estas dos raíces se multiplica por dos (2):

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5a^2}{6} \cdot 2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{5a^2}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{10a^2}{30} = \frac{a^2}{3}, \text{ este valor se compara con el}$$

segundo término del trinomio y se verifica que es igual, razón por la cual la factorización es la diferencia de las raíces elevada al cuadrado (diferencia porque el segundo término del trinomio tiene signo negativo (-)).

$$\boxed{\left(\frac{1}{5} - \frac{5a^2}{6}\right)^2}$$

## Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$



Si se va a factorizar la expresión  $x^2 + 8x + 15$  se procede de la siguiente manera:

Diagram illustrating the analysis of the trinomial  $x^2 + 8x + 15$ :

$$\begin{array}{c} x^2 + 8x + 15 \\ | \qquad \qquad | \\ x \qquad \qquad \text{No tiene raíz exacta} \end{array}$$

Una vez ordenado el trinomio, se analiza si se trata de un trinomio cuadrado perfecto, en este caso, la raíz del primer término es (x) y la raíz del último término (15) no tiene raíz exacta, entonces no se trata de un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto se realiza lo siguiente: en dos factores se coloca la raíz del primer término ( $x$ ) ( $x$ ), luego se halla un par de números que multiplicados den el valor del último término del trinomio, en este caso 15 y sumados algebraicamente tengan un valor igual al coeficiente del segundo término del trinomio (8).

Los pares de números que multiplicados de +15 son: (5 . 3); (-5 . -3); (15 . 1); (-15 . -1). Ahora de estas parejas se selecciona la pareja que al sumarse de 8. Esta pareja es (5 . 3). Con este par de números se completan los dos factores que inicialmente se habían construido ( $x + 5$ ) ( $x + 3$ ).

# Ejercicios

## resueltos

14. Factorizar:  $m^2 + 5m + 6$

$$m^2 + 5m + 6 = (m + 3)(m + 2)$$

Explicación:

El trinomio está ordenado. No se trata de un trinomio cuadrado perfecto, porque el último término (6) no tiene raíz exacta, entonces la raíz del primer término (**m**) se coloca en dos factores, luego se halla un par de números que multiplicados den (+6) (último término del trinomio) y sumados algebraicamente den (+5) (coeficiente del segundo término del trinomio). Esta pareja de números es (3 y 2), porque  $3 \cdot 2 = 6$  y  $3 + 2 = 5$ . Esta pareja de números (6, 2) se reparten en los factores antes relacionados.

15. Factorizar:  $b^2 - 9b + 20$

$$b^2 - 9b + 20 = (b - 5)(b - 4)$$

Explicación:

No se trata de un trinomio cuadrado perfecto porque el primer término si tiene raíz exacta (b) pero el último término del trinomio (20) no

tiene raíz exacta. Entonces la raíz del primer término se reparte en dos factores  $(b \quad)$   $(b \quad)$ , luego se busca una pareja de números que multiplicados den +20 (último término del trinomio) y sumados den +9 (coeficiente del segundo término del trinomio).

Las parejas que al multiplicarlas dan +20 son:

$$(5 \cdot 4); (-5 \cdot -4); (2 \cdot 10); (-2 \cdot -10); (20 \cdot 1); (-20 \cdot -1)$$

De estas parejas se selecciona aquella donde la suma da un valor de  $(-9)$

Esta pareja es  $(-5 \cdot -4)$  porque  $-5 \cdot -4 = 20$  y  $-5 - 4 = -9$

Esta pareja de números se reparten en los dos factores:

$$(b - 4)(b - 5)$$

$$16. \quad -2x - 35 + x^2$$

Ordenando:

$$x^2 - 2x - 35 = (x - 7)(x + 5)$$

Explicación:

La raíz del primer término es  $x$ , el cual se distribuye en cada uno de los paréntesis  $(x \quad)$   $(x \quad)$ .

Las parejas que multiplicadas dan el tercer término  $(-35)$  son:

$$(7 \cdot -5); (-7 \cdot 5); (35 \cdot -1); (-35 \cdot 1)$$

De estas parejas se selecciona aquella cuya suma algebraica es igual al coeficiente del segundo término (-2).

Entonces la pareja es  $(-7 \cdot 5)$ , la cual se distribuye en los paréntesis inicialmente planteados  $(x - 7)(x + 5)$

$$17. \quad a^4 - 60 - 11a^2$$

Ordenando:

$$a^4 - 11a^2 - 60 = (a^2 + 4)(a^2 - 15)$$

Explicación:

La raíz del primer término  $(a^4)$  es  $a^2$ , la cual se reparte en los dos paréntesis:

$$(a^2 \quad ) \quad (a^2 \quad )$$

Las parejas que multiplicadas dan (- 60) son:

$$(-2 \cdot 30) \quad (-4 \cdot 15) \quad (-10 \cdot 6) \quad (-60 \cdot 1) \quad (-20 \cdot 3) \quad (-5 \cdot 12) \quad (2 \cdot -30)$$

$$(4 \cdot -15) \quad (10 \cdot -6) \quad (60 \cdot -1) \quad (20 \cdot -3) \quad (5 \cdot -12)$$

De estas parejas se selecciona aquella cuya suma algebraicamente es igual a (-11).

Esta pareja es  $(4 \cdot -15)$  la cual se distribuye en los paréntesis antes relacionados.

## Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

La única diferencia que hay en este caso y el anterior, es en los coeficientes del primer término del trinomio, mientras que en caso anterior era uno (1), ahora es un número diferente a uno (1). Ejemplo:

$$5m^2 + 13m - 6$$

En este caso el coeficiente es 5, entonces este número no tendría raíz exacta, por lo tanto se recurre a la siguiente estrategia: se multiplican todos los términos del trinomio por el coeficiente del primer término:

$$5 \cdot 5m^2 + 13(5)m - 6 \cdot 5$$

$$25m^2 + 65m - 30$$

El proceso siguiente es similar al anterior caso, donde se plantea que la raíz del primer término, en este caso de  $(25m^2)$  es  $(5m)$ , esta raíz se distribuye en dos paréntesis:

$$(5m \quad ) \quad (5m \quad )$$

Ahora se busca la pareja de números multiplicados den (-30) y que sumada algebraicamente dé (+13) (es de aclarar que en el segundo término se tiene en cuenta el valor original, es decir no se multiplica por (5) sino que se deja planteado para no confundirnos).

Las parejas que multiplicadas dan (-30) son:

$$(-2 \cdot 15) \quad (-6 \cdot 5) \quad (-10 \cdot 3) \quad (-30 \cdot 1) \quad (2 \cdot -15) \quad (6 \cdot -5) \quad (10 \cdot -3) \quad (30 \cdot -1)$$

De estas parejas se selecciona la que sumada algebraicamente de 13, esta pareja es  $(-2 \cdot 15)$ , entonces con esta pareja se completa los paréntesis relacionados anteriormente, quedando así:

$$(5m - 2)(5m + 15)$$

Pero como se había multiplicado el trinomio por (5), ahora se tiene que dividir por el mismo número, para no cambiar la expresión

$$\frac{(5m - 2)(5m + 15)}{5}$$

Para facilitar esta división se puede factorizar el denominador, de tal manera que divida exactamente a los factores del numerador.

Entonces 5 se puede factorizar en  $5 \cdot 1$  y el factor  $(5m - 2)$  se divide por (1) y el otro factor  $(5m + 15)$  por (5)

$$\frac{(5m - 2)(5m + 15)}{5 \cdot 1} = (5m - 2)(m + 3)$$

Entonces el resultado de factorizar

$$5m^2 + 13m - 6 = (5m - 2)(m + 3)$$

# Ejercicios

## resueltos

$$18. \quad 12a^2 + 7a - 10$$

Se multiplican todos los términos del trinomio por el coeficiente del primer término (12), recordando que en el segundo término, no se efectúa la multiplicación, sino que se deja planteada.

$$144a^2 + 7(12)a - 120$$

La raíz del primer término se distribuye en los dos paréntesis

$$(12a \quad ) \quad (12a \quad )$$

Ahora se busca la pareja de números que al multiplicarlos den (-120) y que sumados den (7).

Las diferentes parejas que multiplicadas dan (-120) son:

$$(-2 \cdot 60) \quad (-4 \cdot 30) \quad (-8 \cdot 15) \quad (-24 \cdot 5) \quad (-10 \cdot 12) \quad (-20 \cdot 6) \quad (-40 \cdot 3) \quad (-120 \cdot 1)$$

$$(2 \cdot -60) \quad (4 \cdot -30) \quad (8 \cdot -15) \quad (24 \cdot -5) \quad (10 \cdot -12) \quad (20 \cdot -6) \quad (40 \cdot -3) \quad (120 \cdot -)$$

De estas parejas se selecciona  $(-8 \cdot 15)$  porque al sumar estos términos da (7).

Ahora se completan los factores inicialmente planteados con esta pareja

$$(12a - 8) (12a + 15)$$

Pero como se había multiplicado el trinomio por (12), ahora se procede a dividir los anteriores factores por este número. Este puede colocarse en factores, tratando que cada uno de los factores del numerador sea divisible por los factores del denominador. En este caso los factores pueden ser  $4 \cdot 3$  porque  $(12a - 8)$  es divisible por 4, mientras que  $(12a + 15)$  es divisible por 3.

$$\frac{(12a - 8)(12a + 15)}{4 \cdot 3} = (3a - 2)(4a + 5)$$

Entonces el resultado de factorizar

$$12a^2 + 7a - 10 = (3a - 2)(4a + 5)$$

19.  $35x^2 - 24x + 4$

Se multiplican todos los términos del trinomio por 35 que es el coeficiente del primer término.

$$35 \cdot 35x^2 - 24(35)x + 4 \cdot 35$$

$$-24 \text{ es : } (-14$$

$$1225x^2 - 24(35)x + 140$$

La raíz del primer término es  $35x$ , la cual se reparte en los dos paréntesis  $(35x \quad ) (35x \quad )$

Las parejas de números que multiplicadas dan 140 son:

$$(2 \cdot 70)(-2 \cdot -70)(4 \cdot 35)(-4 \cdot -35)(14 \cdot 10)(-14 \cdot -10)(28 \cdot 5) \\ (-28 \cdot -5)(140 \cdot 1)(-140 \cdot -1)$$

De estas parejas la que sumada algebraicamente da

Esta pareja se reparte en los paréntesis inicialmente planteados

$$(35x - 14)(35x - 10)$$

Ahora estos factores se dividen por 35 que puede ser  $7 \cdot 5$

$$\frac{(35x - 14)(35x - 10)}{7 \cdot 5} = (5x - 2)(7x - 2)$$

Entonces la factorización de  $35x^2 - 24x + 4 = (5x - 2)(7x - 2)$

### 2.8.4 Suma o diferencia de cubos perfectos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

¿?

La suma de dos cubos perfectos ( $a^3 + b^3$ ) es igual a la suma de las raíces  $(a+b)$  multiplicadas por la primera raíz elevada al cuadrado ( $a^2$ ), menos la primera por la segunda  $(ab)$  más la segunda al cuadrado ( $b^2$ ).



#### Ejemplo:

$$64x^3 + 125y^3$$

4x

5y

Raíces cúbicas

Ahora la suma de estas raíces  $(4x + 5y)$  se multiplica por la primera raíz al cuadrado menos la primera por la segunda raíz, mas la segunda al cuadrado:

$$(4x + 5y) \left( (4x)^2 - (4x)(5y) + (5y)^2 \right)$$

$$(4x + 5y) (16x^2 - 20xy + 25y^2)$$

Cuando se trata de diferencia de cubos, la única diferencia respecto a la suma es que el primer factor corresponde a la diferencia de las raíces y en el segundo factor todos términos son positivos.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

# Autoevaluación 6

Factorice hasta donde sea posible:

1.  $c^2 - 25$

2.  $2a^3 + 8a$

3.  $3m^3 - 6m^2 + 15m$

4.  $x^2 + 49$

5.  $27 - x^3y^3$

6.  $4b^2 - 4b - 24$

7.  $y^3 - 2y^2 + y - 2$

8.  $a^2b^2 - 16$

9.  $m^2 - 4m + 3$

10.  $18a^3 - 8a$

**C**uando se analizó el **común divisor** en los números racionales, veíamos que este era aquel número que podía ser dividido exactamente por los denominadores de las fracciones.

Ejemplo:  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$  el común denominador es  $\boxed{15}$ , ya que este número puede ser dividido por  $\boxed{3}$  y por  $\boxed{5}$ . Este principio también se cumple para expresiones algebraicas.

El **Factor Común o Divisor Común** de dos o más expresiones algebraicas, es la expresión que divide exactamente a las expresiones dadas.

Sean las expresiones:  $10a^4b^3$ ,  $5a^2b^4$ ,  $20ab$

El divisor común es :  **$5ab$** , ya que las expresiones

$10a^4b^3$ ,  $5a^2b^4$ ,  $20ab$  se pueden dividir exactamente por este término

$$10a^4b^3 \div 5ab = 2a^3b^2 \quad 5a^2b^4 \div 5ab = ab^3$$

$$20ab \div 5ab = 4$$

### Máximo común divisor de monomios: M D C

Para obtener el **M C D** de monomios, primero se determina el común divisor de los coeficientes, luego se identifican las bases comunes; seleccionando las de menor exponente.

#### **A**

Recordar : que uno (1) es el mínimo común denominador de cualquier expresión.

# Ejercicios

## resueltos

1. Hallar el M C D de las siguientes expresiones:

$$25x^4y, 20x^2y^3, 15xa^3$$

El M C D es:  $5x$ . Porque el común divisor de los coeficientes 25, 20, 15 es  $5$  y la única base común (que está presente en todos los términos) es  $x$  y esta es la de menor exponente.

2. Cuál será el M C D de:  $12a^4b^3, 15b^2c^4, 20a^3b^4c^2$

Al descomponer estos tres coeficientes:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$15 = 5 \cdot 3$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

Se observa que no hay un factor común.

Con relación a las bases se observa que  $b$  está común en los tres términos, pero la de menor exponente es  $b^2$ , entonces el divisor común es  $b^2$ .

## ↪ Máximo común divisor de polinomios:

Para hallar el M C D de polinomios, hay dos caminos:

- Primero: factorizando los polinomios para obtener factores.
- El segundo: por divisiones sucesivas.

Para obtener el M C D por factorización, primero se descomponen los polinomios en sus factores primos, el M C D será el producto de los factores comunes con su menor exponente.

⇒ Hallar el M C D de:

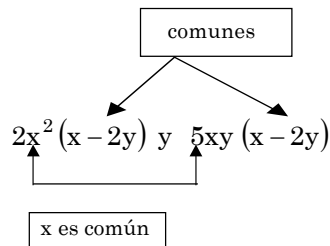
Factorizando cada uno de estos términos:  $2x^2(x-2y)$  y  $5xy(x-2y)$

El M C D es:  $x(x-2y)$ , porque:

$$2x^3 - 4x^2y$$

y

$$5x^2y - 10xy^2$$



$x$  está en los dos términos y es la de menor exponente.

$(x-2y)$  está presente en los dos términos.

Hallar el M C D de  $2x^2 + 2x - 4$ ;  $2x^2 - 8x + 6$ ;  $2x^3 - 2$

Factorizando:

$$2x^2 + 2x - 4 = (x + 2) (2x - 2)$$

$$2x^2 - 8x + 6 = (x - 3) (2x - 2)$$

$$2x^3 - 2 = 2(x^3 - 1) = 2(x - 1) (x^2 + x + 1) = (2x - 2) (x^2 + x + 1)$$

Ahora se buscan los factores comunes con el menor exponente, este es:  $(2x - 2)$ . Entonces el M C D es:  $(2x - 2)$ .

- Cuando los polinomios **no se pueden factorizar**, el M C D se calcula por medio de divisiones sucesivas. En este caso se ordenan los polinomios respecto a la misma letra y se divide el polinomio de mayor grado en el de menor grado.

Cuando los dos tienen el mismo grado, cualquiera puede ser el dividendo. Si la división es exacta, el divisor será el M C D, pero cuando la división no es exacta, se divide el primer divisor por el primer residuo, luego por el segundo residuo y así sucesivamente, hasta que la división sea exacta.

### Ejemplo:

Hallar el M C D de los polinomios:  $12y^2 + 8y + 1$  y  $2y^2 - 5y - 3$

Se hace la primera división:

$12y^2 + 8y + 1 \div 2y^2 - 5y - 3 = 6$  porque al dividir el primer término del dividendo por el divisor se obtiene:

$$\begin{array}{r}
 12y^2 + 8y + 1 \quad | \quad 2y^2 - 5y - 3 \\
 -12y^2 + 30y + 18 \quad | \quad 6 \\
 \hline
 0 \quad +38y + 19
 \end{array}$$

y el residuo es:  $38y + 19$

Ahora: el de mayor grado es el divisor, entonces se divide este término por el residuo que es de menor valor.

$$\begin{array}{r}
 2y^2 - 5y - 3 \quad | \quad 38y + 19 \\
 -2y^2 - y \quad \quad (2/38)y \\
 \hline
 0 \quad -6y - 3
 \end{array}$$

El nuevo residuo es:  $-6y - 3$  se simplifica dividiendo todo el término por  $(-3)$ . Entonces queda:

$$(-6y - 3) \div (-3) = 2y + 1$$

Nuevamente el divisor se divide por el residuo

$$\begin{array}{r}
 38y + 19 \quad | \quad -6y - 3 \\
 -38y - 19 \quad (38/6) \\
 \hline
 0 \quad 0
 \end{array}$$

El residuo es 0.

Entonces el M C D será:  $2y + 1$

## Mínimo común múltiplo:

Para hallar el Mínimo Común Múltiplo, es pertinente analizar los Múltiplos Comunes, los cuales son cantidades que pueden ser divisibles por las cantidades dadas. Ejemplo si tenemos las cantidades  $\boxed{3, 6, 9}$ , estos números tendrán como Múltiplos comunes:  $\boxed{9, 18, 27}$  como se observa, hay gran cantidad de múltiplos comunes, pero para un estudio matemático, lo que se requiere es el **Mínimo**.

**El Mínimo Común Múltiplo M. C. M.**, de dos o más expresiones algebraicas, es una expresión que puede ser divisible exactamente por las expresiones dadas. El M C M contiene el menor coeficiente numérico y la base con el menor grado de todos los múltiplos que posee las expresiones dadas.

## Mínimo común múltiplo de monomios:

Para hallar el Mínimo Común Múltiplo de monomios, primero se descomponen los términos en factores primos. Luego se toman los factores comunes y no comunes con el mayor exponente, el producto de estos será el M C M.

Ejemplo: Hallar el M C M de las siguientes expresiones:

$$2x, 6x^2y, 12y^3$$

Descomponiendo los coeficientes en factores primos:

$$2 = 2 \cdot 1$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

Entonces las expresiones quedan

$$\boxed{2x} \rightarrow 2 \cdot 3x^2y,$$

Ahora se toman los factores comunes y no comunes con el **mayor exponente** de cada uno de estos términos:

$$2^2 \cdot 3x^2y^3$$

Entonces el MCM es  $12x^2y^3$

Ejemplo. Cuál es el M C M de:  $5a^4b$ ,  $10b^3c$ ,  $20a^2c^2$

Descoponiendo los coeficientes en factores primos:

$$5 = 5 \cdot 1$$

$$10 = 5 \cdot 2$$

$$20 = 5 \cdot 2^2$$

Las expresiones quedan:  $5a^4b$ ,  $5 \cdot 2b^3c$ ,  $5 \cdot 2^2a^2c^2$

El Mínimo Común Múltiplo es:  $5 \cdot 2^2a^4b^3c^2$

Entonces el M C M es:  $20a^4b^3c^2$



### Mínimo común múltiplo de polinomios:

Para conocer el M C M de polinomios, la regla es similar que lo hecho para monomios. Es necesario resaltar la importancia que tiene el hecho de dominar los casos de factorización, ya que es la herramienta fundamental para resolver problemas de mínimo común múltiplo. Ejemplo. Hallar el M C M de los siguientes polinomios:

$$3ax - 6a, \quad bx^2 - 4bx + 4b$$

Factorizando los polinomios por separado:  $3ax - 6a = 3a(x - 2)$

$bx^2 - 4bx + 4b = b(x^2 - 4x + 4)$  pero como  $(x^2 - 4x + 4)$

es un trinomio cuadrado perfecto, la factorización completa queda:

$$b(x - 2)^2$$

Ahora se seleccionan los factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$3ab(x-2)^2$$

Entonces el M C M de las expresiones es:  $3ab(x-2)^2$

Ejemplo. Determinar el M C M de  $5a^3 - 40$ ,  $a^2 - 4$

Factorizando cada uno de estos términos:

$5a^3 - 40 = 5(a^3 - 8)$  pero como la factorización de  $(a^3 - 8)$  es  $(a-2)(a^2 + 2a + 4)$ , la factorización completa es:

$$5(a-2)(a^2 + 2a + 4)$$

$$a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$$

Los factores comunes y no comunes con su mayor exponente son:

$$5(a-2)(a^2 + 2a + 4)(a+2)$$

Entonces el M C M de las expresiones es:

$$5(a-2)(a+2)(a^2 + 2a + 4)$$

### **A**

Recordamos:

Que el M.C.M. es una expresión que divide exactamente a cada una de las expresiones dadas.

# Autoevaluación 7

Hallar el M C D de las siguientes expresiones algebraicas:

1.  $3a^2x$ ,  $7a^3x^3$ ,  $12b^2x^2$

2.  $16a^2b$ ,  $20bc^2$ ,  $30x^2y^2$

3.  $24pq^3$ ,  $16p^3$ ,  $28p^4q^2$ ,  $40qxp$

4.  $x^3 + 27$ ,  $2x^2 - 2x - 24$ ,  $x^4 + x^3 - 6x^2$

5.  $3p^2 - 6p$ ,  $3p^3 - 6p^2$ ,  $p^2q - 2pq$ ,  $p^3 - p^2 - 2p$

6.  $2x^3 + 4x^2 - 4x + 6$ ,  $x^3 + x^2 - x + 2$

Hallar el M C M de las siguientes expresiones algebraicas:

7.  $12x^3$ ,  $18xy^2$ ,  $30y^3$

8.  $5a^2$ ,  $7ab^2$ ,  $9ax^3$ ,  $10b^3x^2$

9.  $x^2 + 2x$ ,  $x^3 - 2x^2$ ,  $x^2 - 4$

10.  $(a - 2)^2$ ,  $a^2 - 4$ ,  $(a - 2)^3$

11.  $x^3 - 9x + 5x^2 - 45$ ,  $x^4 + 2x^3 - 15x^2$

## 2.10

## Fracciones algebraicas

**L**as fracciones algebraicas son expresiones donde el numerador y el denominador son monomios o polinomios, aclarando que el denominador debe ser diferente de cero. La expresión puede ser: **entera** cuando el denominador tiene solo valores numéricos, **mixta** si consta de una parte entera y una parte fraccionaria y **racional** si el denominador tiene parte literal.

Entera:  $\frac{a+b}{2}$

Mixta:  $x + \frac{3-y}{x-y}$

Racional:  $\frac{3x-2y}{x-y}$

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{-b}, \frac{-a}{b}$$

Hay algunos aspectos de las fracciones que son importantes resaltar:

⇒ Una fracción es positiva, si tanto el numerador como denominador tiene el mismo signo.



⇒ Una fracción es negativa, si el numerador y denominador tienen signos distintos.



⇒ Cuando el numerador y denominador de una fracción se multiplica o divide por una misma cantidad, la fracción NO se altera.

## Reducción de fracciones

Reducir una fracción, es llevarla a una fracción irreducible sin que su valor cambie; es decir, no hay más factores que sean divisibles entre sí, por lo tanto una fracción irreducible, no se puede simplificar más.

## Fracciones con monomios

Para simplificar fracciones cuyos términos son monomios, se divide el numerador y denominador por los factores comunes, hasta obtener una fracción irreducible. Ejemplo:

Simplificar

$$\frac{6a^3b^2}{2ab^4}$$

Para hallar el factor común de los dos términos (numerador y denominador) es necesario descomponerlos:

$$\frac{6a^3b^2}{2ab^4} = \frac{3 \cdot 2a^3b^2}{2ab^4}$$

Entonces los términos comunes con su menor exponente son:  $2ab^2$

Ahora cada uno de los términos (numerador y denominador) se simplifica, es decir se divide por el factor común:

$$\frac{6a^3b^2 / 2ab^2}{2ab^4 / 2ab^2} = \frac{3a^2}{b^2} \quad \text{Esta fracción es irreducible.}$$

Simplificar:  $\frac{15x^4y^3z^2}{12y^2z^3p}$

Descomponiendo los dos términos:

$$\frac{15x^4y^3z^2}{12y^2z^3p} = \frac{5 \cdot 3x^4y^3z^2}{2^2 \cdot 3y^2z^3p}$$

Los factores comunes con su menor exponente son:  $3y^2z^2$

Ahora cada uno de los términos se divide por el factor común:

$$\frac{15x^4y^3z^2 / 3y^2z^2}{12y^2z^3p / 3y^2z^2} = \boxed{\frac{5x^4y}{4z}} \quad \text{Fracción irreducible.}$$

### Fracciones con polinomios:

Para simplificar fracciones cuyos términos son polinomios, se descompone en factores cada polinomio y se simplifican aquellos que son comunes. Ejemplo:

$$\text{Simplificar: } \frac{6x^3}{12x^4 - 6x^2y}$$

Para simplificar es necesario factorizar los términos que se puedan, en este caso el denominador. Entonces esta fracción queda:

$$\frac{6x^3}{12x^4 - 6x^2y} = \frac{6x^3}{6x^2(2x^2 - y)} \quad \text{simplificando queda: } \boxed{\frac{x}{2x^2 - y}}$$

$$\text{Simplificar: } \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$$

Aquí se factorizan los dos términos de la fracción.

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2} \quad \text{simplificando queda } \boxed{\frac{a-b}{a+b}}$$

**L**a parte que a continuación vamos a estudiar son las operaciones con fracciones, para esto es conveniente recordar los aspectos estudiados con números racionales y especialmente números fraccionarios, ya que las operaciones con fracciones siguen las mismas reglas aritméticas que estos números.

### Suma

Para sumar fracciones, primero se debe simplificar aquellas que se puedan reducir, enseguida se busca el común denominador, para luego realizar las operaciones que permitan terminar la operación.

En el caso de monomios, se busca el M C M de los denominadores, luego este se divide por cada denominador y este resultado se multiplica por su correspondiente numerador. Finalmente se hace la suma, siguiendo los principios estudiados para la suma de polinomios. Ejemplo:

Realizar la siguiente operación:

$$\frac{x-2}{6} + \frac{3x+2}{3}$$

El M C M es: 6 Este es el denominador común, el cual se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones dadas y luego se multiplica por los numeradores respectivos.

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{6} + \frac{3x+2}{3} &= \frac{(6 \div 6)(x-2) + (6 \div 3)(3x+2)}{6} = \frac{(x-2) + (6x+4)}{6} = \\ &= \frac{x-2+6x+4}{6} = \frac{7x+2}{6}\end{aligned}$$

Realizar la siguiente operación:

$$\frac{x-2}{4a^2b} + \frac{2x-3}{12ab^2}$$

Recordando que para hallar el denominador común se seleccionan los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, entonces se descomponen para facilitar el proceso:

$$\frac{x-2}{4a^2b} + \frac{2x-3}{12ab^2} = \frac{x-2}{2^2a^2b} + \frac{2x-3}{2^2 \cdot 3ab^2}$$

Entonces el denominador común de estas dos fracciones es:

$$2^2 \cdot 3a^2b^2 = 12a^2b^2$$

Ahora para hallar los términos del numerador, se divide este denominador común por cada uno de los denominadores de las fracciones y se multiplica por sus respectivos numeradores:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{4a^2b} + \frac{2x-3}{12ab^2} &= \frac{(12a^2b^2 \div 4a^2b)(x-2) + (12a^2b^2 \div 12ab^2)(2x-3)}{12a^2b^2} = \\ &= \frac{(3b)(x-2) + (a)(2x-3)}{12a^2b^2} = \frac{(3bx-6b) + (2ax-3a)}{12a^2b^2} = \boxed{\frac{3bx-6b+2ax-3a}{12a^2b^2}}\end{aligned}$$

Cuando los denominadores son polinomios, éstos se factorizan y se busca el común denominador, el procedimiento es similar al caso anterior.

Operar:  $\frac{2}{3x+3} + \frac{4}{2x-2}$

Antes de iniciar la operación es importante verificar si las fracciones se pueden simplificar, en este caso, la segunda fracción se puede simplificar:

$$\frac{4}{2x-2} = \frac{4}{2(x-1)} = \frac{2}{x-1}$$

Entonces las fracciones quedan:

$$\frac{2}{3x+3} + \frac{2}{x-1}$$

Ahora si se procede a hallar el denominador común, pero para esto es necesario factorizar los denominadores. En este caso el denominador del primer fraccionario es el único que se puede factorizar, entonces:

$$\frac{2}{3x+3} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{3(x+1)} + \frac{2}{x-1}$$

El denominador común de estas dos fracciones es:  $3(x+1)(x-1)$ .

Ahora se procede de la forma anterior, este denominador se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones y luego se multiplica por su respectivo numerador:

$$\begin{aligned} & \frac{[3(x+1)(x-1) \div 3(x+1)] 2 + [3(x+1)(x-1) \div (x-1)] 2}{3(x+1)(x-1)} = \\ & = \frac{(x-1)2 + 3(x+1)2}{3(x+1)(x-1)} = \frac{2x-2+6x+6}{3(x+1)(x-1)} = \frac{8x+4}{3(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

Operar:

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2x}{x^2 - x - 2}$$

Factorizando los denominadores, para el primero diferencia de cuadrados y para el segundo trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} + \frac{2x}{(x-2)(x+1)}$$

El factor común es:  $(x+2)(x-2)(x+1)$ . Entonces:

$$\frac{\{[(x+2)(x-2)(x+1)] \div [(x+2)(x-2)]\}(x) + \{[(x+2)(x-2)(x+1)] \div [(x-2)(x+1)]\}(2x)}{(x+2)(x-2)(x+1)} =$$

$$\frac{(x+1)(x) + (x+2)(2x)}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 2x^2 + 4x}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{3x^2 + 5x}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

## Resta

Para restar fracciones, el procedimiento es similar al de la suma, solo que el signo de la operación es negativo lo cual se debe operar con cuidado en la destrucción de paréntesis, recordando que cuando un paréntesis está precedido por el signo (-) todos los términos que están dentro del paréntesis cambian de signo.

Operar:  $\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{2x}{x^2 - x - 2}$

Las operaciones son las mismas que en la suma, pero el signo afecta la segunda parte del proceso.

$$\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{2x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} - \frac{2x}{(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{[(x+2)(x-2)(x+1) \div (x+2)(x-2)](x) - [(x+2)(x-2)(x+1) \div (x-2)(x+1)](2x)}{(x+2)(x-2)(x+1)} =$$

$$\frac{(x+1)(x) - (x+2)(2x)}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{(x^2 + x) - (2x^2 + 4x)}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{x^2 + x - 2x^2 - 4x}{(x+2)(x-2)(x+1)} =$$

$$= \frac{-x^2 - 3x}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

Otra forma de presentar esta fracción es colocándole el signo a toda la fracción, por lo tanto los signos del numerador quedan positivos:

$$\frac{3x^2}{2y^2} \cdot \frac{5xy}{10y^2z}$$

$$- \frac{x^2 - 3x}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

## Multiplicación de fracciones

La multiplicación de fracciones es similar a la multiplicación de números fraccionarios, numerador por numerador y denominador por denominador. La fracción obtenida se debe simplificar si es posible.

Operar:

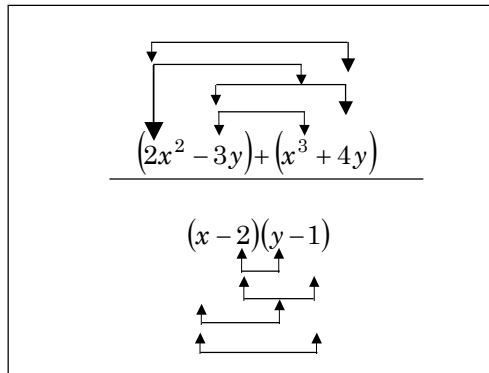
Se realiza la multiplicación numerador por numerador y denominador por denominador:

$$\frac{3x^2}{2y^2} \cdot \frac{5xy}{10y^2z} = \frac{3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x \cdot y}{2 \cdot 10 \cdot y^2 \cdot y^2 \cdot z} \quad \text{simplificando:} \quad \frac{3x^3}{4y^3z}$$

Operar:  $\frac{2x^2 - 3y}{x - 2} \cdot \frac{x^3 + 4}{y - 1}$

La operación se realiza multiplicando los numeradores, como se hace para polinomios, igual los denominadores.

Recordando la multiplicación de polinomios:



$$\frac{2x^2 - 3y}{x - 2} \cdot \frac{x^3 + 4}{y - 1} = \frac{(2x^2 - 3y)(x^3 + 4)}{(x - 2)(y - 1)} = \frac{2x^5 + 8x^2 - 3x^3y - 12y}{xy - x - 2y + 2}$$

La fracción resultante no se puede simplificar.

Operar:  $\left(y - \frac{5x}{2}\right) \cdot \left(2 + \frac{y-1}{x}\right)$

Como observamos, son fracciones mixtas, para lo cual se debe primero convertirlas en fracciones racionales y luego si multiplicarlas. Es importante recordar que un número entero se pueden convertir en fraccionario colocándole como denominador el número uno (1).

$$\left(y - \frac{5x}{2}\right) = \left(\frac{y}{1} - \frac{5x}{2}\right) = \frac{2y - 5x}{2}$$

$$\left(2 + \frac{y-1}{x}\right) = \left(\frac{2}{1} + \frac{y-1}{x}\right) = \frac{2x + y - 1}{x}$$

Como las dos fracciones son racionales, ahora si se pueden multiplicar.

$$\begin{aligned} \frac{(2y - 5x)}{2} \cdot \frac{(2x + y - 1)}{x} &= \frac{4xy + 2y^2 - 2y - 10x^2 - 5xy + 5x}{2x} = \\ &= \frac{2y^2 - 10x^2 - 2y - xy + 5x}{2x} \end{aligned}$$

## División de fracciones

Como en la división hay un dividendo y un divisor, la operación se realiza multiplicando el dividendo por el recíproco de divisor. Ejemplo

Operar:  $\left(\frac{6ab}{3z^2}\right) \div \left(\frac{2xz}{2y}\right)$

El recíproco del divisor  $\frac{2xz}{2y}$  es:  $\frac{2y}{2xz}$

Entonces se multiplica el dividendo por este recíproco

$$\frac{6ab}{3z^2} \cdot \frac{2y}{2xz} = \frac{12aby}{6xz^3} = \boxed{\frac{2aby}{xz^3}}$$

Otra forma de realizar una división es:

$$\frac{\frac{6ab}{3z^2}}{\frac{2xz}{2y}} = \text{Producto de } \mathbf{extremos} \text{ sobre producto de } \mathbf{medios}$$

$$= \frac{6ab \cdot 2y}{3z^2 \cdot 2xz} = \frac{12aby}{6xz^3} = \boxed{\frac{2aby}{xz^3}}$$

## Fracciones complejas

Las fracciones complejas son aquellas donde el numerador, denominador o los dos tienen fracciones algebraicas.

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{x}{y}}{2}, \frac{3 + \frac{a}{b}}{\frac{x}{y} - \frac{2}{a}} \quad \text{son algunos ejemplos de fracciones complejas.}$$

Si se observa, se puede deducir que una fracción compleja no es más que la división indicada de dos fracciones.

Las fracciones de este tipo, no se pueden operar de dicha forma, por lo cual se requiere un método de simplificarlas para poder realizar operaciones entre ellas.

Para **simplificar** fracciones complejas, se operan las fracciones del numerador y denominador por separado y con los resultados de éstas, se hace la división. Ejemplo:

$$\text{Simplificar la fracción: } \frac{2 - \frac{a}{x}}{x + \frac{1}{a}}$$

Se operan independientemente el numerador y el denominador.

$$\text{Numerador: } 2 - \frac{a}{x} = \frac{2}{1} - \frac{a}{x} = \boxed{\frac{2x - a}{x}}$$

$$\text{Denominador: } x + \frac{1}{a} = \frac{x}{1} + \frac{1}{a} = \boxed{\frac{ax + 1}{a}}$$

La nueva fracción queda:

$$\frac{\frac{2x - a}{x}}{\frac{ax + 1}{a}} = \frac{a \cdot (2x - a)}{x \cdot (ax + 1)} = \frac{2ax - a^2}{ax^2 + x} \quad \text{Aplicando los productos de extremos sobre producto de medios o la famosa **Ley de la Oreja**.}$$

$$\text{Ejemplo: simplificar: } \frac{a - x + \frac{1}{x}}{2 - \frac{x - 1}{x + 1}}$$

Se realizan las operaciones planteadas en el numerador y denominador en forma independiente:

$$\text{Numerador: } a - x + \frac{1}{x} = \frac{a}{1} - \frac{x}{1} + \frac{1}{x} = \boxed{\frac{ax - x^2 + 1}{x}}$$

$$\text{Denominador: } 2 - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{2}{1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \boxed{\frac{2x + 2 - x + 1}{x + 1}} = \boxed{\frac{x + 3}{x + 1}}$$

La nueva fracción será:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{ax - x^2 + 1}{x}}{\frac{x + 3}{x + 1}} &= \frac{(x + 1)(ax - x^2 + 1)}{(x)(x + 3)} = \\ &= \frac{ax^2 - x^3 + x + ax - x^2 + 1}{x^2 + 3x} = \boxed{\frac{ax^2 - x^2 - x^3 + ax + x + 1}{x^2 + 3x}} \end{aligned}$$

# Autoevaluación 8

**Fracciones algebraicas.** Simplificar las siguientes fracciones:

$$1. \frac{15a^4b^3}{3a^5z^2}$$

$$2. \frac{17axt}{5bp}$$

$$3. \frac{20yz}{35zw}$$

$$4. \frac{5a^5t^3}{2t^6a^2b}$$

$$5. \frac{3x^2 + 19x + 20}{6x^2 + 17x + 12}$$

$$6. \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}$$

$$7. \frac{2}{x-1 - \frac{3}{x - \frac{x-3}{x+2}}}$$

$$8. \frac{\frac{x-2}{x} - \frac{y+3}{y}}{4 - \frac{3-x}{1 - \frac{x-2}{2 + \frac{2}{x}}}}$$

# CAPITULO

# 3

## Razones y proporciones

### Contenido

Autoevaluación inicial

3.1 Razones

3.2 Proporciones

3.3 Reparto proporcional

3.4 Porcentaje



## 3.1

# Razones

**L**as razones son comparaciones entre dos cantidades, de acuerdo con el tipo de comparación, se presentan dos clases de razones: las aritméticas y geométricas.

### 3.1.1 Razones aritméticas

Sea:

$$8 - 3 = 5$$

La razón aritmética, llamada también razón por diferencia, consta de un antecedente, en este caso (8) y un consecuente (5). Es decir,

$8$  excede en  $5$  a  $3$ .

Matemáticamente se representa:  $a - b = c$  y significa que  $a$  excede a  $b$ , en la cantidad  $c$ . Esta razón indica cuanto el antecedente excede el consecuente.

Como se observa, esta **razón aritmética se representa por el signo menos.**

### 3.1.2 Razón geométrica

Sea:  $\frac{12}{4} = 3$

Significa que la relación entre 12 y 4 es 3, es decir que (12) contiene (3) veces a (4).

**A** La razón geométrica se expresa en forma de fracción, donde el antecedente es el numerador y el consecuente es el denominador, por lo tanto la razón geométrica tiene las mismas propiedades que los números fraccionarios.

Matemáticamente la razón geométrica se representa como:

$$\frac{a}{b} = c$$

En la razón  $a$  contiene  $c$  veces a  $b$ . La razón geométrica, llamada también razón por cociente, indica cuantas veces el antecedente contiene al consecuente. **La razón geométrica se representa por una división.**

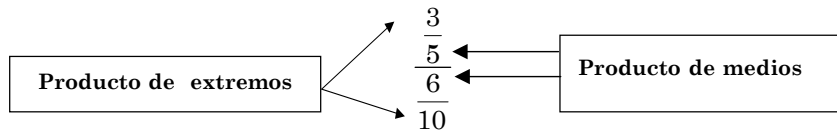
## 3.2

### Proporciones

**D**ada la proporción  $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$  significa que la razón  $\frac{3}{5}$  se está comparando con la razón  $\frac{6}{10}$

En éstas también se identifican el antecedente, en este caso  $\left(\frac{3}{5}\right)$  y el consecuente  $\left(\frac{6}{10}\right)$ .

Para comprobar esta proporción es necesario que el producto de los extremos sea igual a los medios entonces:



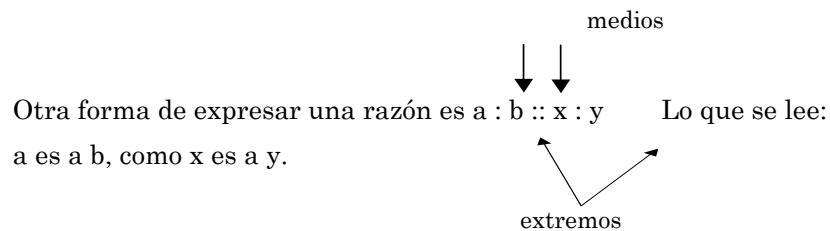
El producto de los extremos es igual a  $3 \cdot 10 = 30$  y el producto de los medios es igual a  $5 \cdot 6 = 30$ , entonces se comprueba que es una proporción.

Matemáticamente, la proporción se define como una comparación entre dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Donde:  $\frac{a}{b}$  es el antecedente y  $\frac{x}{y}$  es el consecuente.

En la razón expresada,  $a$  y  $y$  son los extremos,  $b$  y  $x$  son los medios.



### Propiedad fundamental

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$a \cdot y = b \cdot x$$

$\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$  también se puede escribir  $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{8}{14}}$ . Es una proporción porque:

El producto de los extremos  $4 \cdot 14 = 56$  y el producto de medios es  $7 \cdot 8 = 56$

**Cuarta proporcional:** se refiere al valor de uno de los términos de una proporción, cuando se conocen tres de ellos. Ejemplo, si se quiere hallar la cuarta proporcional de la siguiente proporción:

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$$

Se aplica la ley fundamental: **productos de medios es igual a productos de extremos.**

$$\frac{4}{6} \Rightarrow 6 \cdot x = 4 \cdot 9 \quad \text{entonces } 6x = 36.$$

**A** En una ecuación como la anterior, para hallar el valor de la incógnita  $x$ , se dividen los dos términos de la igualdad por el coeficiente de la incógnita.

Teniendo en cuenta lo anterior, para encontrar el valor de la incógnita, se dividen los dos términos por (6) porque es el coeficiente que acompaña la incógnita.

Entonces,  $\frac{6x}{6} = \frac{36}{6}$ , al simplificar da como resultado  $x = 6$

Matemáticamente,  $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ , siendo  $a, b, c$  conocidos, entonces  $x$  será la cuarta proporcional.

Hallar el valor de  $x$  de la siguiente proporción:  $\frac{9}{x} = \frac{3}{8}$

Aplicando la ley fundamental: productos de medios es igual al producto de extremos así:  $3 \cdot x = 9 \cdot 8$  queda:  $3x = 72$ , dividiendo los dos términos por 3 (coeficiente de la incógnita):

$$\frac{3x}{3} = \frac{72}{3} \quad \text{Entonces: } x = 24$$

**Transposición de términos:** Esta propiedad permite escribir la proporción de diferente forma, sin que se pierda la igualdad.

Ejemplo: la proporción

$$\frac{1}{7} = \frac{3}{21} \text{ se puede escribir de las siguientes formas: } \frac{1}{3} = \frac{7}{21} \quad \text{ó} \quad \frac{3}{1} = \frac{21}{7}$$

Matemáticamente  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  se puede escribir:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{ó} \quad \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

# Autoevaluación 9

**Razones y proporciones.** En las siguientes razones, identificar el antecedente y el consecuente:

1.  $a - b = c$

2.  $12 - 4 = 8$

3.  $25 - 4 = 21$

4.  $\frac{12}{4} = 3$

5.  $\frac{20}{5} = 4$

En las razones dadas, identificar el valor del término que falta:

6.  $x - 5 = 4$

7.  $38 - x = 29$

8.  $\frac{x}{5} = 10$

9.  $\frac{84}{x} = 7$

En las siguientes proporciones, cuál es el valor de la x:

10.

11.

Expresar en dos o más formas, las siguientes proporciones sin que pierdan su equivalencia:

12.  $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

13.  $\frac{5}{12} = \frac{45}{108}$

$$\frac{7}{2} = \frac{x}{6}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{8}{2}$$

## 3.3

### Reparto proporcional

**E**l reparto proporcional consiste en la distribución de cierta cantidad en partes, las cuales pueden tener diferentes valores, según las siguientes clases de reparto:

- ➔ Reparto proporcional directo simple
- ➔ Reparto proporcional directo compuesto
- ➔ Reparto proporcional inverso simple
- ➔ Reparto proporcional inverso compuesto

#### 3.3.1 Reparto proporcional directo simple

Existen dos formas para resolver problemas de este tipo: factor constante y por proporciones.

#### Factor constante

Ejemplo. Si se desea repartir \$56.000 entre niños de 3, 5, 6 años de edad, con la condición que a mayor edad, le corresponde mayor cantidad de dinero, entonces se procede de la siguiente forma:

1. Se suman las partes entre las cuales se van a repartir  $3 + 5 + 6 = 14$

2. Se divide la cantidad a repartir entre la suma de las partes

$$\$56.000 \div 14 = \$4.000$$

3. Cada parte se multiplica por el resultado de la división anterior

$$3 \cdot 4.000 = 12.000,$$

$$5 \cdot 4.000 = 20.000,$$

$$6 \cdot 4.000 = 24.000$$

Lo anterior indica que:

El niño de 3 años recibirá \$12.000

El de 5 años \$20.000 y

El de 6 años \$24.000

**A**

En términos generales, en el reparto proporcional directo simple hay una sola serie de datos para hacer el reparto, de tal manera que al número más grande le corresponda la mayor cantidad.

Si se quiere repartir la cantidad  $A$  en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  partes, entonces:

1. Se suman las partes entre las cuales se van a repartir  $x + y + z = w$

2. Se divide la cantidad a repartir entre la sumas de la partes:

$$A \div w = p$$

3. Luego cada parte  $x, y, z$  se multiplica por  $p$ .

Cada uno de los productos indican cuánto le corresponde a cada parte.

## Proporciones

Volviendo al ejemplo anterior, donde se desea repartir \$56.000 entre niños de 3, 5, 6 años de edad, con la condición que a mayor edad, mayor cantidad, por el método de proporciones se resuelve de la siguiente forma:

1. También se suman las partes:  $3 + 5 + 6 = 14$

2. Se plantea las proporciones

$$\boxed{\frac{a}{3} = \frac{56.000}{14}} ; \boxed{\frac{b}{5} = \frac{56.000}{14}} ; \boxed{\frac{c}{6} = \frac{56.000}{14}}$$

donde  $a, b, c$  son las incógnitas que se van a despejar.

3. Se aplica la cuarta proporcional a cada una de estas proporciones:

$$a \cdot 14 = 56.000 \cdot 3 \quad \text{Resolviendo queda: } 14a = 168.000$$

$$b \cdot 14 = 56.000 \cdot 5 \quad \text{Resolviendo queda } 14b = 280.000$$

$$c \cdot 14 = 56.009 \cdot 6 \quad \text{Resolviendo queda } 14c = 336.000$$

5. Por último se hallan los valores de cada una de las incógnitas:

$14a = 168.000$  Dividiendo por el coeficiente de la incógnita:

$$\frac{14a}{14} = \frac{168.000}{14}$$

Entonces  $a = 12.000$

$14b = 280.000$  Dividiendo por el coeficiente de la incógnita:

$$\frac{14b}{14} = \frac{280.000}{14}$$

Entonces  $b = 20.000$

$14c = 336.000$  Dividiendo por el coeficiente de la incógnita:

$$\frac{14c}{14} = \frac{336.000}{14}$$

Entonces  $c = 24.000$

En términos generales, para desarrollar problemas por el método de proporciones, se realiza lo siguiente:

Siendo  $A$  la cantidad a repartir

1. Se suman las partes:  $x + y + z = w$
2. Se plantean las proporciones:

$$\frac{a}{x} = \frac{A}{w}; \quad \frac{b}{y} = \frac{A}{w}; \quad \frac{c}{z} = \frac{A}{w}$$