3. Se aplica la cuarta proporcional así:

$$a \cdot w = A \cdot x \qquad b \cdot w = A \cdot y \qquad c \cdot w = A \cdot z$$

4. Se hallan los valores de las incógnitas.

El resultado es el mismo independientemente del método que se trabaje.

A través de los años se ha oido decir que la **Regla de tres** es una herramienta muy valiosa que facilita la resolución de sencillos problemas de la vida cotidiana. Esta herramienta precisamente se basa en las proporciones, razón por la cual a continuación se plantean algunos ejercicios que pueden ser solucionados aplicando esta estrategia.

Ejercicios resueltos

1. Veintitrés (23) metros cuadrados de baldosín cuestan \$299.000. ¿Cuánto cuestan 5 metros cuadrados?

   Para la solución de este tipo de problemas, se colocan las columnas de acuerdo con las variables con que se está trabajando, en este caso metros y precios. Esta es una regla de tres directa porque entre **más** metros **más** es el valor (reparto proporcional directo simple), entonces se plantea de la siguiente forma:

Metros	**\$**
23	**299.000**
5	**x**

   Por ser directa se plantea la proporción:

   $$\frac{23}{5} = \frac{299.000}{x}$$

Aplicando la cuarta proporcional 23 . x = 5 . 299.000. Resolviendo: 23x = 1.495.000

Para hallar la incógnita se dividen los dos términos por el coeficiente de la incógnita:

$$\frac{23x}{23} = \frac{1.495.000}{23}$$

Entonces: x = 65.000

Esto significa que los cinco (5) metros cuadrados de baldosín valen $65.000

2. Se sabe que para la elaboración de 20 latas de duraznos se gastan 10 kilogramos de duraznos. ¿Cuántos kilogramos de duraznos caben en cada una de las latas?

   Las variables son latas y kilogramos de duraznos y son directamente proporcionales porque entre **más** latas **más** kilogramos de duraznos.

latas	**kilos de duraznos**
20	**10**
↓	↓
1	**x**

La proporción es $\frac{20}{1} = \frac{10}{x}$

Resolviendo:

$20 \cdot x = 10 \cdot 1$ entonces: $20x = 10$

Dividiendo por el coeficiente de la incógnita:

$$\frac{20x}{20} = \frac{10}{20}$$

Se obtiene $x = \dfrac{1}{2}$

Significa que en cada lata caben $\frac{1}{2}$ kilogramos de duraznos.

3. El valor del un (1) dólar en pesos colombianos es de \$2800. ¿Cuántos dólares se pueden comprar con \$1.400.000?

Es una proporción directa porque entre **más** dólares **más** pesos colombianos se necesitan. Las variables son: dólares y pesos colombianos.

Dólar	**\$**
1	**2800**
↓	↓
x	**1.400.000**

La proporción es: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2.800}{1.400.000}$

Resolviendo: $x \cdot 2.800 = 1.400.000 \cdot 1$ entonces $2.800\,x = 1.400.000$

Hallando el valor de la incógnita

$$\frac{2.800x}{2.800} = \frac{1.400.000}{2.800}$$

Entonces: x = 500

Significa que con \$1.400.000 se pueden comprar US\$ 500 (dólares).

4. Teniendo en cuenta que un kilogramo equivale a 1000 gramos, ¿a cuántos gramos equivalen 158 kilogramos?

Es directa porque entre **más** kilogramos **más** gramos.

kilogramos	**gramos**
1	**1000**
158	**x**

La proporción es: $\frac{1}{158} = \frac{1000}{x}$

Resolviendo: x . 1 = 158 . 1000. Entonces: $\frac{x}{1} = \frac{158.000}{1}$

$x = 158.000$

Significa que 158 kilogramos equivalen a 158.000 gramos.

5. Con frecuencia se escucha decir que un auto va a cierta velocidad, es el caso, cuando se va a 80 kilómetros por hora (km/hr) equivale

a decir que el auto recorre 80 kilómetros en (1) hora. Con esta relación se puede hallar otros datos. Ejemplo:

Si un auto va a la velocidad de 80 km/ hr. ¿Cuántas horas se gastarán para recorrer 360 kilómetros?

Es directa porque entre **más** horas **más** kilometros se recorrerán.

kilómetros	**horas**
80	**1**
360	**x**

La proporción es: $\dfrac{80}{360} = \dfrac{1}{x}$

Resolviendo: $x \cdot 80 = 360 \cdot 1$. Entonces $80x = 360$

Hallando la incógnita $\dfrac{80x}{80} = \dfrac{360}{80}$. Entonces $x = \dfrac{360}{80}$

Simplificando $x = \dfrac{36}{8} = \dfrac{18}{4} = \dfrac{9}{2} = 4.5$

Esto significa que para recorrer 360 kilometros se gastan 4.5 horas

6. Otro ejemplo podría ser si un vehículo va a 120 km / hora (recorre 120 kilómetros en 1 hora), hallar los kilómetros recorridos en 5 horas.

kilómetros	**horas**
120	**1**
↓	↓
x	**5**

La proporción es: $\dfrac{120}{x} = \dfrac{1}{5}$

Resolviendo: x **.** 1 = 120 **.** 5 Entonces $x = 600$

Es decir en cinco (5) horas se recorren 600 kilómetros.

7. También es muy usual escuchar que el interés de un préstamo es al tanto por ciento, por ejemplo al 3% mensual, esto equivale a decir que por cada \$100 de capital se cobran \$3 de interés, en un mes. Por eso si se quiere saber cuánto tengo que pagar por concepto de intereses por un préstamo de \$5.000.000, al 3% mensual, se haría lo siguiente:

(\$) capital	**(\$) interés**
100	**3**
↓	↓
5.000.000	**x**

La proporción es: $\dfrac{100}{5.000.000} = \dfrac{3}{x}$

Resolviendo x **.** 100 = 5.000.000 **.** 3. Entonces: $100x = 15.000.000$

Hallando la incógnita $\dfrac{100x}{100} = \dfrac{15.000.000}{100} = 150.000$

Esto significa que por el préstamo de $5.000.000 se tienen que pagar $150.000 de intereses mensuales.

8. Cuando se dice que en un grupo de 25 estudiantes, el 40% son mujeres, significa que los 25 estudiantes (o total del grupo) son el 100% y con esta relación se puede establecer cuántas son mujeres de ese grupo:

número de estudiantes	**%**
25	**100**
↓	↓
x	**40**

La proporción es: $\dfrac{25}{x} = \dfrac{100}{40}$

Resolviendo x **.** 100 = 40 **.** 25. Entonces: $100x = 1000$

Hallando la incógnita $\dfrac{100x}{100} = \dfrac{1000}{100}$. Entonces $x = 10$

Significa que de los 25 estudiante 10 son mujeres y el resto (25 - 10 = 15) son hombres.

9. En la producción de 200 avisos publicitarios, se dañaron 30. ¿Qué porcentaje de pérdidas se obtuvo? Tenga en cuenta que los 200 avisos son el total o sea el 100%.

Avisos publicitarios	**%**
200	**100**
$\downarrow$	$\downarrow$
30	**x**

La proporción es: $\dfrac{200}{30} = \dfrac{100}{x}$

Resolviendo $x \cdot 200 = 30 \cdot 100$. Entonces $200x = 3000$

Hallando la incógnita $\dfrac{200x}{200} = \dfrac{3000}{200}$. Entonces $x = 15$

Es decir el porcentaje de pérdidas es del 15%.

10. La fórmulación para la elaboración de mortadela es la siguiente:

Carne de res	50%
Carne de cerdo	30%
Grasa de cerdo	20%

Si se va a realizar una producción de 300 kilogramos de mortadela. ¿Qué cantidad de materia prima tengo que adquirir? Recuerde que la producción total es de 300 kilogramos y este sería el 100%

Carne de res

kilogramos	%
300	**100**
↓	↓
x	**50**

$\frac{300}{x} = \frac{100}{50}$ Resolviendo

$x \cdot 100 = 50 \cdot 300$. Entonces $100x = 15.000$

Hallando la incógnita $\frac{100x}{100} = \frac{15.000}{100} = 150$

La cantidad de carne de res es de 150kg.

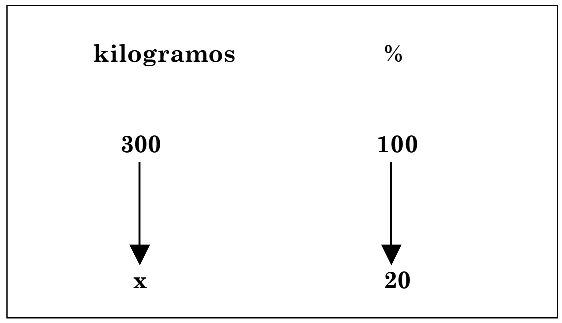
Carne de cerdo:

kilogramos	%
300	**100**
↓	↓
x	**30**

$$\frac{300}{x} = \frac{100}{30} \quad \text{Entonces} \quad \frac{100x}{100} = \frac{9.000}{100}$$

Hallando la incógnita x = 90 Kg de carne de cerdo

Grasa de cerdo



$$\frac{300}{x} = \frac{100}{30} \quad \text{Entonces } 100x = 6000$$

Despejando la incógnita x = 60 Kg de grasa de cerdo.

Entonces la materia prima necesaria para la elaboración de 300 kilogramos de mortadela es:

- 150 Kilogramos de carne de res

- 90 kilogramos de carne de cerdo

- 60 Kilogramos de grasa de cerdo

11. El costo total de la elaboración de un vaso de yogur es de $150. ¿En cuánto se tiene que vender cada vaso para obtener una utilidad del 20%?

Como el costo total es de $150, este equivale al 100%, para obtener un 20% de utilidad se tendría que hallar el 120% (100% del costo + el 20% de utilidad).

($)	%
150	**100**
$\downarrow$	$\downarrow$
x	**120**

Proporción $\frac{150}{x} = \frac{100}{120}$

Resolviendo $100x = 120 \cdot 150$ Entonces $\frac{100x}{100} = \frac{18000}{100}$
Entonces $x = 180$

Para obtener una utilidad del 20%, cada vaso se tendrá que vender en $180.

En los anteriores ejemplos se aplicó la regla de tres directa, porque todas las variables tenían una relación directamente proporcional como: entre **más** dólares se tengan **más** es la cantidad de pesos colombianos; entre **mayor** sea la velocidad **mayor** es el número de kilómetros recorridos y entre **más** cantidad de producción **mayor** es cantidad de materia prima, entre otros.

3.3.2 Reparto proporcional directo compuesto

Partiendo del siguiente ejemplo: para el pago de una nómina, se debe repartir $2.500.000 entre tres empleados, cuyos tiempos de trabajo son:

José: 25 días, 6 horas por día

Alberto: 20 días, 8 horas por día

Mario: 22 días, 7 horas por día

¿Cuánto debe recibir de salario cada uno?

Al igual que en caso del reparto proporcional directo simple, estudiado anteriormente, existen dos métodos para el desarrollo de estos problemas: factor constante y por proporciones.

Factor constante

Primero: se determina el tiempo completo de trabajo así:

José: 25 días x 6 horas / día = 150 horas

Alberto: 20 días x 8 horas / día = 160 horas

Mario: 22 días x 7 horas / día = 154 horas

Total = **464 horas**

Segundo: se determina el factor constante: **2.500.000 ÷ 464 = 5.387,9**

Tercero: se multiplica el factor constante por el número de horas trababajas por cada uno.

José: 150 horas x 5387,9 = 808.185

Alberto: 160 horas x 5387,9 = 862.064

Mario: 154 horas x 5387,9 = 829.736,6

Es decir que a José se le pagan $ 808.185; a Alberto $ 862.064 y a Mario $ 829.736,6.

Método por proporciones

Partiendo del ejemplo anterior.

Primero: al igual que el método anterior, se determina el número total de horas: 454.

Segundo: se establece la proporción así: x para José, y para Alberto y z para Mario, entonces:

José: $$\frac{x}{150} = \frac{2.500.000}{464}$$

Alberto: $$\frac{y}{160} = \frac{2.500.000}{464}$$

Mario: $$\frac{z}{154} = \frac{2.500.000}{464}$$

Tercero: se aplica la cuarta proporcional.

$$\Rightarrow \frac{x}{150} = \frac{2.500.000}{464} \quad \text{Donde: } x \cdot 464 = 2.500.000 \cdot 150$$

$$\text{Entonces} \quad \frac{464x}{464} = \frac{375000000}{464} = \boxed{808.189{,}66}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{160} = \frac{2.500.000}{464} \quad \text{donde: } y \cdot 464 = 2.500.000 \cdot 160$$

$$\text{Entonces} \quad \frac{464y}{464} = \frac{400000000}{464} = \boxed{862.068.97}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{154} = \frac{2.500.000}{464} \quad \text{Donde: } z \cdot 464 = 2.500.000 \cdot 154$$

$$\text{Entonces:} \quad \frac{464z}{464} = \frac{385000000}{464} = \boxed{829.741.38}$$

Si se comparan los resultados por los dos métodos, se observa que son similares.

A

En términos generales, el reparto proporcional compuesto se presenta cuando hay dos o más series de datos para realizar dicho reparto.

En este tipo de reparto, también a las partes **mayores** les corresponde las cantidades **mayores**.

3.3.3 Reparto proporcional inverso simple

Partiendo del siguiente ejemplo:

Si se quiere repartir $54.000 entre tres niños de 5, 7,9 años de edad, donde el niño que tenga **menos** edad recibirá **mayor** cantidad de dinero.

Primero: se aplica el recíproco de las partes: $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$

Segundo: se multiplica los denominadores: $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$

Tercero: se divide el producto por cada denominador:

$\frac{315}{5} = 63$, $\frac{315}{7} = 45$, $\frac{315}{9} = 35$

Cuarto: se suman los cocientes: $63 + 45 + 35 = 143$

Quinto: se plantean las proporciones.

- Para el de 5 años: $\frac{143}{63} = \frac{54.000}{x}$ Entonces: $x = 23.790{,}209$

- Para el de 7 años: $\frac{143}{45} = \frac{54.000}{y}$ Entonces: $y = 16.993{,}007$

- Para el de 9 años: $\frac{143}{35} = \frac{54.000}{z}$ Entonces: $z = 13.216{,}783$

A

En términos generales, el reparto proporcional inverso se caracteriza porque a la parte más pequeña, le corresponde la mayor cantidad y viceversa.

Cuando se tiene que realizar un reparto proporcional inverso se deben tener en cuenta los siguiente pasos:

Si la cantidad a repartir es A, en las partes x, y, x entonces:

Primero: se aplica el recíproco a las partes: $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$

Segundo: se multiplican los denominadores: $x \cdot y \cdot z = p$

Tercero: el producto se divide por cada denominador:

$$\frac{p}{x} = c_1, \quad \frac{p}{y} = c_2, \quad \frac{p}{z} = c_3$$

Cuarto: se suman los cocientes: $c_1 + c_2 + c_3 = k$. La cantidad k será la que se reparte proporcionalmente a los c_1, c_2, c_3 .

Quinto: se plantea la proporción. $\frac{k}{c_1} = \frac{A}{x}, \frac{k}{c_2} = \frac{A}{y}, \frac{k}{c_3} = \frac{A}{z}$

Lo mismo que en la regla de tres directa también existe la regla de tres inversa, la cual se basa en proporción inversa.

Los tipos de problemas que se pueden resolver con esta herramienta son por ejemplo, calcular la cantidad de hombres que se deben contratar para la realización de una obra, ya que entre **más** hombres **menos** tiempo se gasta.También es el caso que entre **mayor** velocidad de un automóvil **menos** es el tiempo que se gasta para llegar de un lugar a otro. A continuación se plantean algunos ejemplos:

Ejercicios resueltos

13. Cinco (5) operarios realizan una obra en 8 días. ¿Cuántos operarios se necesitarán para elaborar la obra en 4 días?

En este caso entre **más** operarios **menos** días, entonces se trata de una regla de tres inversa.

En este problema el planteamiento es el mismo que en la regla de tres directa, pero la proporción es diferente.

Obreros	**días**
5 $\uparrow$	**8** $\downarrow$
x	**4**

Proporción: $\frac{x}{5} = \frac{8}{4}$

Resolviendo $4 \cdot x = 8 \cdot 5$. Entonces $4x = 40$

Despejando la incógnita $\frac{4x}{4} = \frac{40}{4}$ Entonces $x = 10$

Esto significa que para hacer la obra en cuatro (4) días se necesitan 10 obreros, es decir entre menos días se necesitan más obreros.

14. Un auto va a una velocidad de 100 kilómetros por hora (km/hr), gastando 3 horas para llegar de una ciudad a otra. ¿Cuánto tiempo gasta en llegar a la misma ciudad si eleva la velocidad a 150 (km/hr)?

En este caso, entre **mayor** sea la velocidad del auto, **menor** es el tiempo que se gasta, entonces se trata de una regla de tres inversa.

Velocidad km/hr	**Tiempo horas**
100 ↑	**3** ↓
150	**x**

Proporción: $\frac{150}{100} = \frac{3}{x}$

Resolviendo $150 \cdot x = 100 \cdot 3$ Entonces $150x = 300$

Despejando incógnita: $\frac{150x}{150} = \frac{300}{150}$ Entonces $x = 2$

Significa que al aumentar la velocidad se reduce el tiempo a 2 horas.

Con estas bases ya se pueden solucionar problemas sencillos de cualquier índole, por lo tanto es necesario que se resuelvan algunos que tengan que ver con el quehacer diario de cada uno de los estudiantes, para que este aprendizaje sea significativo, es decir relacionar esta temática con la realidad.

Autoevaluación 10

Proporciones

1. Se quiere repartir una herencia de $26’000.000 entre cuatro hijos, en relación directa a la edad de cada uno, las cuales son: 5, 8, 10, 14 años ¿Cuánto le correspondería a cada hijo?

2. El director de una compañia para estimular a sus empleados, decide repartir $500.000 entre cinco empleados, en relación inversa a las faltas obtenidas, las cuales fueron: Jorge tuvo 5, Alberto tuvo 9 y Fabian tuvo 7 faltas ¿Cuánto le corresponderá a cada uno de los empleados?

3. Un Ingeniero de producción, tiene $4’600.000 para repartir en tres grupos de trabajadores, A, B, C. La cantidad a repartir debe ser de acuerdo con la cantidad de tiempo trabajado en horas. El grupo A trabajó 19 días, utilizando 7 horas / día; el grupo B trabajo 18 días, utilizando 8 horas / día y el grupo C lo hizo en 21 días, con 6 horas / día. ¿Cuánto deberá recibir cada grupo por el trabajo realizado?

4. Al fallecer el señor Fructuoso Calducho, en el testamento se estipuló que la herencia equivalente a $120.000.000, debería ser repartida de tal forma que al hijo de menor edad le correspondería la parte más alta de dicha herencia. Los hijos del señor Calducho son: Nancy de 10 años, José de 15 años, Katty de 12 años y Marlene de 25 años. ¿Cuánto dinero de corresponde a Katty y a Nancy?

3.4 Porcentaje (%)

El concepto de porcentaje es muy utilizado en problemas de la vida diaria, por ejemplo si se quiere hallar el 20% de 5.000, significa que 5.000 se divide en cien (100) partes y de ellas se toman 20.

Para resolver este tipo de problemas se puede a través de la regla de tres directa antes vista, teniendo en cuenta que 5.000 es el 100%.

5000	100%
X	20%

Ahora se plantea la proporción:

$$\frac{500}{x} = \frac{100}{20}$$

$100x = 100.000$

$x = 1.000$ Esto significa que el 20% de 5.000 es igual a 1.000.

Ejemplo 1

En la repartición de una lotería, el ganador debe pagar como impuestos el 30% del premio, el cual fue de $5'000.000 ¿Cuánto recibirá realmente el ganador?

El total del premio es $5.000.000 Entonces este valor es el 100%, para hallar los impuestos que se deben pagar se plantea la regla de tres: si $5.000.000 es el 100%, ¿a cuánto equivaldrá el 30%?

$	%
5.000.000	100
X	30

La proporción es:

$$\frac{5.000.000}{x} = \frac{100}{30}$$

$100x = 150.000.000$

$x = 1.500.000$

Significa que el ganador tiene que pagar $1.500.000 por impuestos, entonces lo que le queda del premio es: el valor del premio total menos lo que debe pagar de impuestos.

$5.000.000 = $1.500.000 = $3.500.000

Ejemplo 2

El vendedor de una compañia recibió $250.000 como porcentaje por concepto de 10% por ventas. ¿De cuánto fueron las ventas del vendedor?

Se plantea: Si $250.000 equivalen al 10%, ¿a cuántos ($) equivale el 100%?

$	%
250.000	10
x	100

Proporción:

$$\frac{250.000}{x} = \frac{10}{100}$$

$10x = 25.000.000$

$x = 2.500.000$

Las ventas del vendedor fueron de $2.500.000

Ejemplo 3

En las compras de artículos para hogar, la señora María obtiene el 5% de descuento por pago en efectivo. Las compras sumaron $725.000 ¿de cuánto fue el descuento?

Las compras equivalen al 100%, entonces se plantea: si $725.000 son el 100%, ¿a cuánto equivale el 5%?

$	%
725.000	100
x	5

Proporción:

$$\frac{725.000}{x} = \frac{100}{5}$$

$100x = 3.625.000$

$x = 36.250$

Significa que el descuento por las compras es de $36.250

Ejemplo 4

La empresa Comestibles San José, compró galletas a $74 la unida ¿A cómo debe venderlas para obtener una utilidad del 40%?

Entonces: si $74 es el 100%, ¿cuánto es el 40%?

$	%
74	100
x	40

Proporción:

$$\frac{74}{x} = \frac{100}{40}$$

$100x = 2960$

$x = 29.60$

Entonces, para tener una utilidad del 40% debe venderlas a $74 (costo), más $29.6 (utilidad del 40%) = $103.6 cada paquete.

Ejemplo 5

Una compañía de sistemas electrónicos vende microchips a $250.000. Estos microchips fueron comprados a $165.000 ¿Cuál es el porcentaje de ganancia?

Si los $165.000 son el 100%, ¿a qué porcentaje equivalen los $250.000?

$	%
165.000	100
250.000	x

Proporción:

$$\frac{165.000}{250.000}=\frac{100}{x}$$

$165.000x = 25.000.000$

$x = 151.5\%$

Entonces como el costo es del 100% y la venta es del 151.5%, la utilidad es la diferencia entre estos dos valores:

$151.5 - 100 = 51.5\%$

Autoevaluación 11

1. En la producción de tornillos, una compañía vende el producto a \$48,5 obteniéndose una ganancia del 18%.

a. ¿De cuánto es la ganancia?

b. ¿Cuánto gana la compañía por la venta de 1.246 tornillos ?

2. El señor Jimmy K trabaja en ventas, recibiendo 12% de bonificación. En un pago le dieron \$759.000,oo por ventas.

a. ¿De cuánto fue la venta realizada por Jimmy?

b. Si Jimmy K vende \$7'326.200 ¿Qué cantidad recibirá Jimmy por dicha venta?

3. En la elaboración de un saborizante, se requiere preparar 1.200 Kg, la mezcla debe tener el 1,3% de ácido ascórbico y 0,045% de bicarbonato.

a. ¿Qué cantidad de ácido ascórbico y de bicarbonato se requiere para reparar la mezcla?

b. Si se modifica la mezcla de tal forma que para 50 Kg, se adiciona 0,24 Kg de ácido ascórbico y 1,35 Kg de bicarbonato. ¿Cuánto de ácido y de bicarbonato se requiere para preparar una mezcla de 650 Kg de saborizante.

CAPITULO

4

+

Contenido

La Geometría es la ciencia que ha dado bases para el desarrollo de la matemática, por lo cual merece que se le de gran atención, ya que a través del análisis geométrico, se pueden comprender los principios matemáticos más relevantes.

El principio básico de la geometría es medir objetos o elementos del medio, pero como estos objetos tienen formas diversas, es necesario clasificarlos para poder estudiarlos.

El análisis geométrico se puede realizar en:

Una dimensión

En ésta solo se mide la longitud, como el largo de una calle y el alto de una persona, entre otros.

A Las magnitudes de una dimensión tienen unidades lineales. Las más importantes son: metros (m), centímetros (cm), milímetros (mm), pies (ft) y pulgadas (in).

Dos dimensiones

Aquí se miden dos longitudes, tal es el caso del largo y el ancho. El ejemplo típico es la medida de superficies o áreas de triángulos, cuadrados y circunferencias, entre otros.

A

Las magnitudes de dos dimensiones tienen unidades cuadradas. Las más importantes son: metros cuadrados (m^2) , centímetros cuadrados (cm^2), pies cuadrados (ft^2) y pulgadas cuadradas (in^2).

Tres dimensiones

Se refiere a los cuerpos que ocupan un lugar en el espacio, es decir se miden: largo, ancho y profundidad.

A Las magnitudes de tres dimensiones tienen unidades cúbicas. Las más importantes son: metros cúbicos (m^3), centímetros cúbicos (cm^3), pies cúbicos (ft^3) y pulgadas cúbicas (in^3).

4.1 Geometría plana

Para el estudio de la geometría, se requiere del análisis de algunos conceptos básicos, que aunque se han estudiado, es conveniente repasarlos para lograr una mejor comprensión.

Punto

Se puede decir que el punto es "una señal que no tiene forma ni dimensiones pero que se ve". Del punto existen dos axiomas:

- Por un punto pasan infinitas rectas.
- Por dos puntos puede pasar una y solo una recta.

Línea

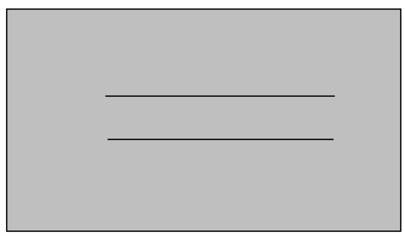
La línea se puede definir como la sucesión de puntos y de acuerdo con la forma como estos se organizan son de dos tipos:

- **Líneas rectas:** puntos secuenciales en forma colineal, es decir en filas.
- **Líneas curvas:** la secuencia no es colineal, están colocados uno detrás de otro en cualquier orden.

De las líneas se puede hacer un estudio amplio, sin embargo, el objetivo en este curso es activar los conocimientos previos, razón por la cual sólo se estudiarán los aspectos más importantes.

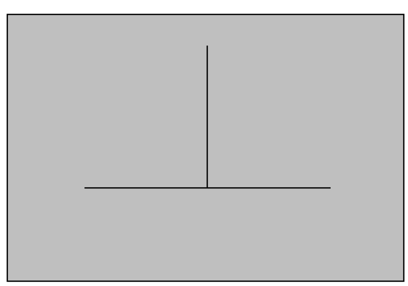
Rectas paralelas

Son aquellas que presentan la misma inclinación. Este tipo de rectas nunca se unen.



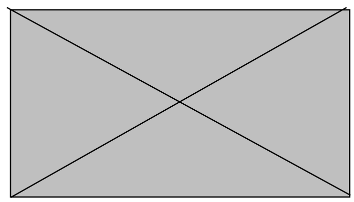
Rectas perpendiculares

Se refiere a las líneas que se cortan en un punto formando un ángulo recto; es decir, un ángulo de 90°.



Rectas oblícuas

Son rectas que se cortan en un punto (vértice) formando un ángulo diferente al recto.



Como se observa, cuando dos o más rectas se cortan, se originan figuras muy particulares que se analizan a continuación.

Los polígonos

Son figuras planas que se forman cuando tres o más rectas no colineales se cortan. Estas figuras constan de los siguientes elementos:

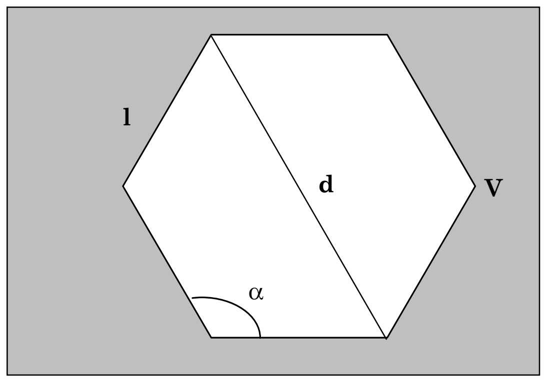
Lados: son los segmentos de recta que se cortan. Estos segmentos permiten determinar la longitud de la figura. Según el número de lados los polígonos se clasifican en: triángulos (3 lados), cuadriláteros (4 lados), pentágonos (5 lados) y así sucesivamente.

Vértices: se refiere a los puntos donde se cortan los segmentos de recta. El triángulo tiene 3 vértices, el cuadrilátero tiene 4 vértices, así sucesivamente.

Angulos: se define como el espacio que hay entre dos rectas cuando se cortan entre si, dicho de otra manera, la abertura que se forma.

Diagonales: son segmentos de recta que unen vértices no consecutivos.

En la figura se muestran cada uno de estos elementos.



Donde:

V = vértice

l = lados del polígono

d = diagonal

α = ángulos

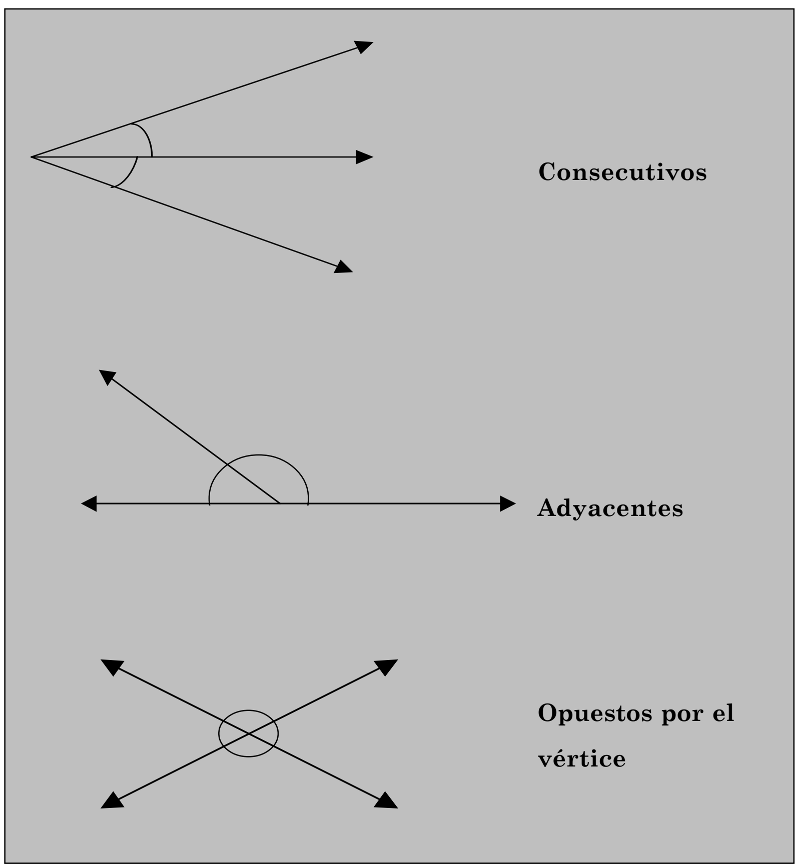
La anterior figura se trata de un Hexágono, porque tiene 6 lados, por lo tanto tiene 6 vértices.

Repasemos

Los vértices de los polígonos se les nombran usando letras mayúsculas y los lados con letras minúsculas.

Clases de ángulos

Los angulos se clasifican según su **posición** en: consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice.



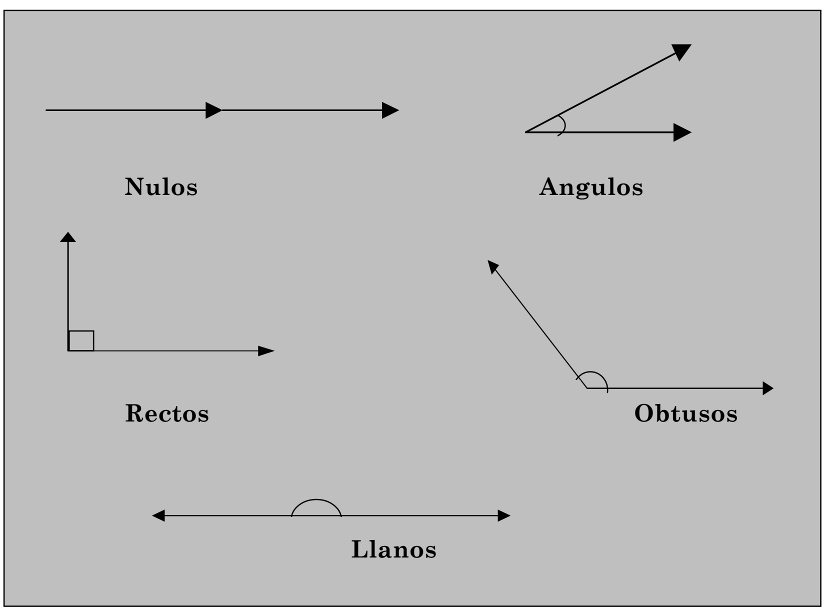
Repasemos

Dos ángulos son **consecutivos** cuando están en un mismo plano, tienen el mismo vértice, un lado común y los lados no cumunes quedan en distinto semiplano respecto del lado común.

Dos ángulos son **adyacentes** cuando son consecutivos y los lados no comunes forman una línea recta. La suma de la medida de dos ángulos adyacentes es igual a 180°.

Dos ángulos son **opuestos por el vértice** sí y solo sí tienen el mismo vértice y los lados de uno son prolongación de los lados del otro. Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes, es decir, tienen la misma medida.

Según su medida se clasifican en: en nulos, agudos, rectos, obtusos y llanos.



Repasemos

Los ángulos:

- **Agudos** miden más de 0° y menos de 90°
- **Rectos** son los que miden 90°
- **Obtusos** miden más de 90° y menos de 180°
- **Llanos** miden 180°
- **Complementarios** son aquellos cuya suma equivale a un recto (90°)
- **Suplementarios** son aquellos cuya suma vale dos (2) ángulos rectos (180°)

Clases de polígonos

Se clasifican de acuerdo con el número de lados en:

Triángulo:	3 lados
Cuadrilátero:	4 lados
Pentágono:	5 lados
Hexágono:	6 lados
Heptágono:	7 lados
Octágono:	8 lados
Nonágono:	9 lados
Decágono:	10 lados
Polígonos n lados:	n lados

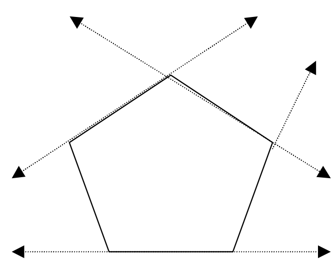
- Un polígono es **equilátero** sí y sólo sí sus lados son congruentes, es decir, iguales.

- Un polígono es **equiángulo** sí y sólo sí todos sus **ángulos** son congruentes.

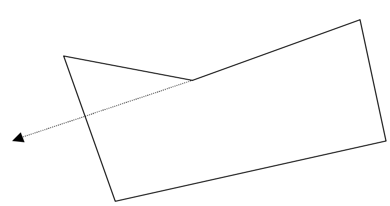
- Un polígono es **regular** sí y sólo sí es **equilátero** y **equiángulo**. El ejemplo más claro de un polígono regular es el cuadrado.

Polígonos convexos y cóncavos

Un polígono es **convexo** si los ángulos interiores son todos menores o iguales a 180°, o si al prolongar uno de sus lados no corta a ningún otro lado del polígono.



Un polígono es **cóncavo**, si al prolongar uno de sus lados, la prolongación corta a otrolado del polígono.

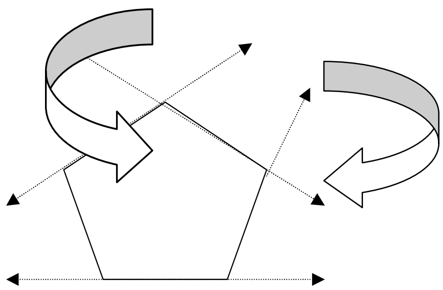


FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA- UNAD

La suma de los ángulos **interiores** de un polígono convexo es igual a tantas veces **dos** ángulos rectos (180) como lados tiene el polígono menos dos (2), es decir:

Suma ángulos interiores = 180 (n-2)

Donde n = número de lados del polígono



La suma de los ángulos **exteriores** de un polígono convexo es igual al valor de cuatro (4) ángulos rectos, es decir a 360°.

Ejemplo, si se desea averiguar la suma de los ángulos internos de un polígono de 7 lados, se aplica:

Suma de ángulos interiores $(\sum) = 180° \cdot (n-2)$

Como n = 7

Suma de ángulos interiores $(\sum) = 180° \cdot (7-2) = 180 \cdot 5 = 900°$

Esto indica que en el Heptágono (n = 7) la suma de los ángulos interiores suman 900°.

⇨ Otro ejemplo para hallar la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Suma de ángulos interiores $(\Sigma) = 180° \cdot (n-2)$

Como n= 3 entonces:

Suma de ángulos interiores de un triángulo $(\Sigma) = 180° \cdot (3-2) = 180°$

Angulo interior de un polígono regular

Teniendo en cuenta que el polígono regular tiene todos sus ángulos iguales, el valor de uno de sus ángulos interiores, se obtiene dividiendo la suma de todos los ángulos por el número de lados.

Valor del ángulo interior de un polígono regular θ se obtiene así:

$$\theta = \frac{2r(n-2)}{n} =$$

donde r = ángulo recto.

Para hallar el valor de un ángulo interno de un polígono regular de 12 lados, se procede aplicando la siguiente fórmula:

$$\theta = \frac{180(n-2)}{n} = \frac{180(12-2)}{12} = \frac{180 \cdot 10}{12} = 150°$$

Donde:

$n = 12$

Entonces, el ángulo interior de un polígono regular de 12 lados mide 150°.

⇨ Para el caso de un hexágono, como n = 6, ya que éste tiene 6 lados, entonces el valor de uno de sus ángulo es:

$$\theta = \frac{180(n-2)}{n} = \frac{180 \cdot 4}{6} = 120$$

Esto indica que en un hexágono el ángulo interior mide 120°.

⇨ En el caso de un polígono regular de 15 lados, los ángulos interiores suman:

$\sum$ *Angulos Interiores* = 180° (15- 2) = 2340° y

El valor del ángulo interior del polígono es:

$$\theta = \frac{180(n-2)}{n} = \frac{180 \cdot 13}{15} = 156°$$

A

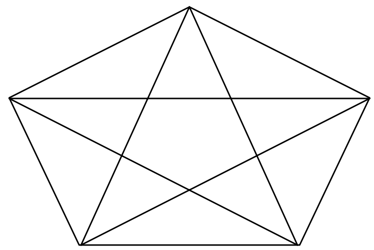
El número de **diagonales** de un polígono es igual al semiproducto del número de lados de éste multiplicado por el número de lados menos tres (3).

Número de diagonales $(\delta) = \frac{n}{2}(n-3)$

De cada vértice de un polígono, se pueden trazar tantas diagonales como lados tiene la figura menos tres, o sea: n - 3.

Si se quiere saber quiere saber cuántas diagonales tiene un pentágono: Como n = 5

$\delta = \frac{n}{2}(n-3)$ entonces $\delta = \frac{5}{2}(5-3) = 5$ diagonales.



Con la fundamentación anterior, se puede abordar el estudio de los polígonos más utilizados como son el triángulo y los cuadriláteros.

4.1.1 El triángulo

El triángulo es un polígono que consta de tres lados. Por consiguiente en el triángulo se encuentran tres vértices y tres ángulos. ¿Cuántas diagonales tiene este polígono?

Los triángulos se clasifican así:

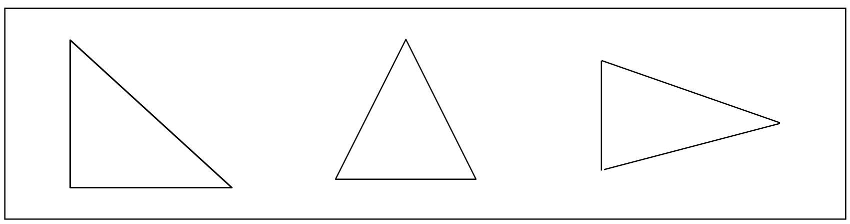
Según sus lados en:

- **Equiláteros.** Porque tienen todos sus lados iguales
- **Isósceles.** Tienen dos lados iguales
- **Escalenos.** Sus tres lados son desiguales

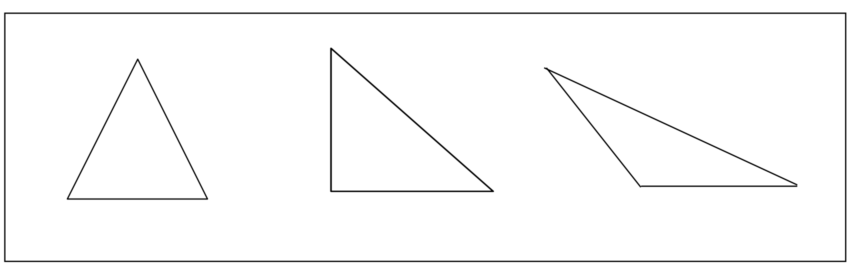
Según sus ángulos en:

- Acutángulos. Tienen sus tres ángulos agudos
- Obtusángulos. Tienen un ángulo obtuso
- Rectángulo. Tienen un ángulo recto (90°)

En los siguientes triángulos, según sus lados, identifique a qué clase pertenecen:



En los siguientes triángulos, según sus ángulos, identifique a que clase pertenecen.



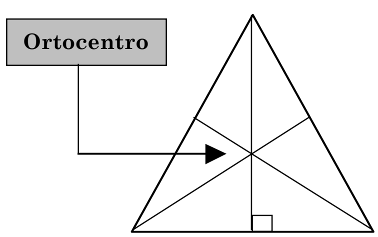
Líneas y puntos notables de un triángulo

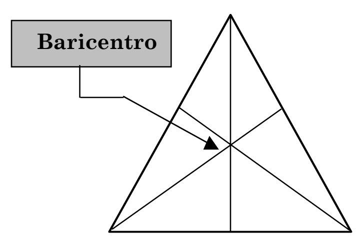
En todo triángulo se pueden trazar las siguientes líneas y puntos especiales:

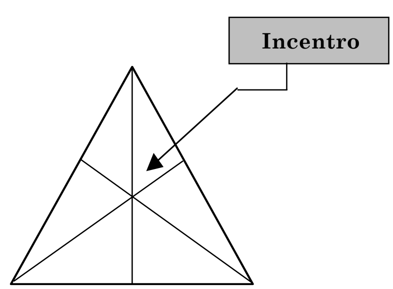
- **Altura:** segmento perpendicular, trazado desde los vértices hasta los lados opuestos. Las tres alturas del triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro**.

- **Mediana:** segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro.**

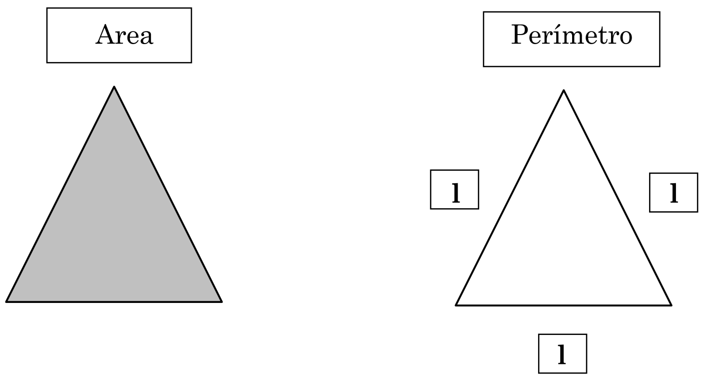
- **Bisectriz:** se refiere al segmento que divide un ángulo del triángulo en dos ángulos congruentes. Las tres bisectrices se cortan en un punto llamando **incentro**.







Area y perímetro del triángulo



$$A = \frac{b\,x\,h}{2}$$

$$P = l + l + l$$

El **área** se define como el resultado de medir una superficie plana de cualquier figura, mientras que el **perímetro** se refiere a la longitud del contorno de una figura.

Para hallar las áreas y perímetros, existen algunas fórmulas que son específicas para cada tipo de figura.

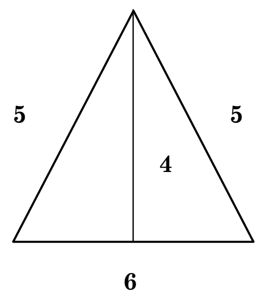
Específicamente para el **triángulo**, el **área es igual a la mitad de la base por la altura:**

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$ donde b = base y h = altura

El **perímetro** se halla, sumando las longitudes de los lados del triángulo.

$$P = l_1 + l_2 + l_3$$

Ejercicio . Hallar el área y el perímetro del siguiente triángulo:



Area:

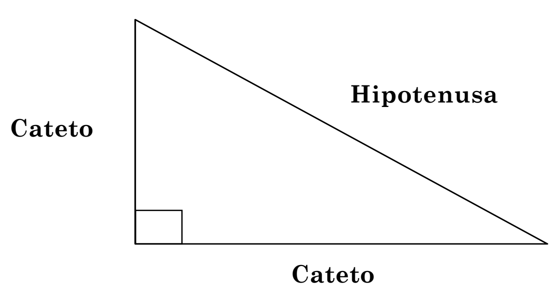
$\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$ Como b = 6 y h =4 Entonces $A = \frac{6 \,.\, 4}{2} = 12$

Perímetro:

$\boxed{P = l_1 + l_2 + l_3}$ Entonces P = 6 + 5 + 5 = 16

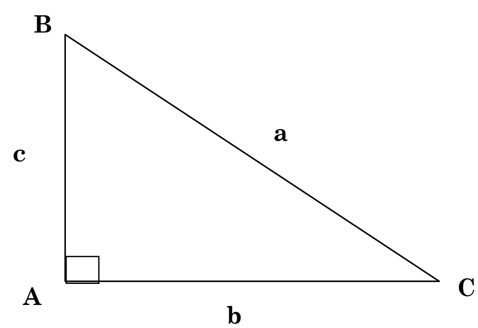
Teorema de pitágoras

En un triángulo rectángulo (cuando uno de sus ángulos es recto o de 90°), los lados adyacentes al ángulo recto se denominan **catetos** y el lado opuesto a este ángulo recto se llama **hipotenusa.**



PITAGORAS demostró que:

en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

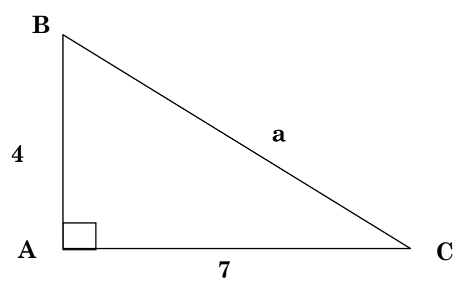
Repasemos

- Los vértices de un polígono se denominan con letras mayúsculas y los lados con letras minúsculas.

- En los triángulos cada vértice y su lado opuesto se denominan con la misma letra .

Ejercicios resueltos

Si se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 y 7 centímetros respectivamente, calcular el valor de la hipotenusa, el área y el perímetro.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como:

a = ? b = 7 c = 4

Reemplazando en la ecuación:

$a^2 = 7^2 + 4^2$; $a^2 = 49 + 16$; $a^2 = 65$ entonces la hipotenusa $a = \sqrt{65}$

Para hallar el área, se aplica la fórmula: $\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$

La base es 7 y la altura 4, entonces: $A = \frac{7 . 4}{2} = 14cm^2$

Para hallar el perímetro de este tríangulo, se suman todos sus lados:

$7 + 4 + \sqrt{65} = 11 + \sqrt{65}$ cm

4.1.2 El cuadrilátero

Se llaman cuadriláteros a los polígonos que tiene 4 lados. Estos polígonos tienen también 4 ángulos y 4 vértices.

Los cuadriláteros se clasifican en:

Paralelogramo

Tiene sus lados opuestos paralelos. Dentro de esta clasificación están:

⇨ **El cuadrado**: tiene 4 lados iguales y 4 ángulos rectos.

⇨ **Rectángulo**: tiene dos lados consecutivos desiguales y 4 ángulos rectos.

⇨ **Rombo**: tiene sus 4 lados iguales, pero sus ángulos consecutivos son diferentes.

⇨ **Romboides**: tiene los lados consecutivos desiguales y los ángulos contiguos también son diferentes.

Trapecio

Tiene solo dos lados opuestos paralelos. Los tipos de trapecios son:

⇨ **Rectángulo**: tiene dos ángulos rectos

⇨ **Isósceles**: tiene iguales sus lados no paralelos

- **Escaleno:** no son ni trapecios rectángulos ni isósceles.

Trapezoide

No tienen lados opuestos paralelos.

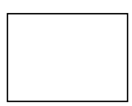
Propiedades de los paralelogramos

En todo **paralelogramo**:

- Sus lados opuestos son iguales.
- Sus ángulos opuestos son iguales.
- Sus diagonales los dividen en partes iguales.

Area de los cuadriláteros

Cuadrado

l 

l

Area = lado por lado = $l \cdot l$

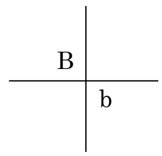
Rectángulo

h

b

Area = base por altura = $b \cdot h$

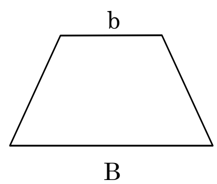
Rombo



Area = La mitad de la diagonal mayor por la diagonal menor

$A = (1/2)B \cdot b$

Trapecio



Area = La mitad de la suma de la base mayor más la base menor por la altura

$A = (1/2)(B + b).h$

El área de un polígono regular, se calcula de la siguiente manera:

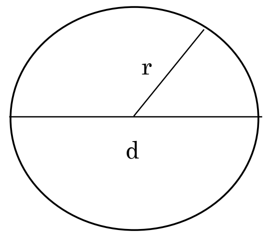
$$A = \frac{1}{2}(P \cdot a)$$

P = perímetro

a = apotema. Recordando que la apotema, es la perpendicular del centro del polígono a uno de sus lados.

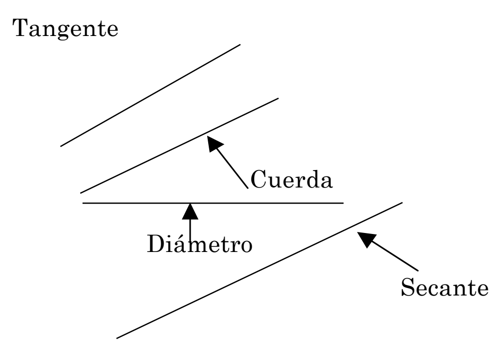
4.1.3 La circunferencia y el círculo

Circunferencia. Es el conjunto de puntos que equidistan a un punto fijo llamado centro. La distancia de cualquier punto al centro se llama radio (r). El doble del radio se conoce como diámetro (d).



Círculo. El círculo es el conjunto de puntos que están dentro de la circunferencia. El perímetro del círculo es la circunferencia.

Líneas notables de la circunferencia



Diámetro: es la recta que va de un punto al punto opuesto, pasando por el centro de la circunferencia.

Cuerda: es el segmento de recta que va de un punto a otro punto de la circunferencia, cuando la cuerda pasa por el centro se llama diámetro.

Tangente: es un segmento de recta, que corta a la circunferencia en un punto.

Secante: segmento de recta que corta la circunferencia en dos puntos.

Area y perímetro del círculo

$\boxed{A = \pi r^2}$ donde:

A = área

r = radio de la circunferencia

π = 3.1416....

$P = 2\pi r$

donde:

P = perímetro

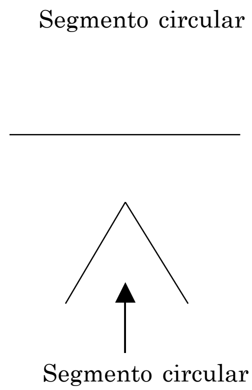
r = radio de la circunferencia.

π = 3.1416....

Es de anotar que la circunferencia NO tiene área, porque esta se refiere al contorno del círculo.

Otras figuras derivadas del círculo

Sector circular: es la parte del círculo limitada por dos radios y el arco comprendido entre ellos.

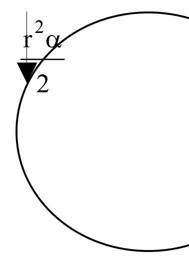


El área del sector circular es igual a: donde:

r = radio

α = ángulo

Segmento circular: se refiere a la parte del círculo comprendido entre una cuerda y su arco correspondiente.



Autoevaluación 12

Geometría plana

1. Dibujar un polígono convexo, identificando todos sus elementos.

2. Un polígono tiene 9 lados, ¿cuánto suman sus ángulos interiores?

3. ¿Cuál será el valor de los ángulos interiores de un polígono regular que tiene 14 lados?

4. ¿Cuántas diagonales tendrá un polígono de 11 lados?

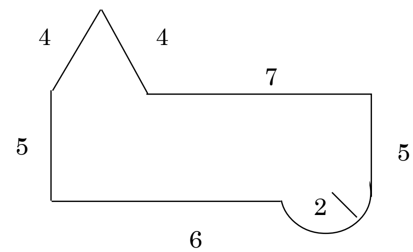
5. ¿Cuántas diagonales tiene un triángulo? corrobore su respuesta gráficamente.

6. Dibujar tres triángulos, uno con las alturas, otro con las medianas y otro con las bisectrices.

7. El perímetro de un triángulo es 54 cm. Hallar sus lados si se encuentran en relación 2-3-4.

8. El ángulo interior de un polígono regular mide 165° ¿cuántos lados tendrá dicho polígono?

9. ¿Cuál será el área de la figura que se presenta a continuación?



10. El perímetro de un rectángulo es de 120 cm, ¿cuáles serán las dimensiones del rectángulo, si sus lados estan en relación 2-3?

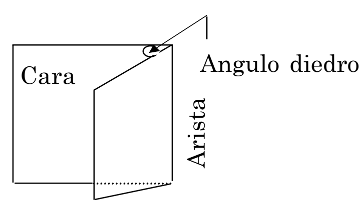
4.2 Geometría espacial

Cuando se analizan las dimensiones de un lote rectángular y se dice que tiene 120 m^2, indica que el largo multiplicado por el ancho es igual a 120, de esta forma lo que se está midiendo es la superficie del lote. En muchas ocasiones lo que se requiere es medir además del largo y el ancho, la profundidad; es decir, la tercera dimensión de los objetos.

Esta tercera dimensión se refiere a las figuras geométricas que **ocupan un lugar en el espacio**. Antes de abordar esta temática es necesario recordar algunos conceptos:

4.2.1 Diedros

Formado por dos semiplanos.



Es la porción de espacio comprendida en dos semiplanos que tienen una recta en común. Cada plano se denomina **cara** y la línea común se llama **Arista**.

La magnitud del diedro no depende del tamaño de las caras, sino del ángulo formado entre ellas, puede ser recto, agudo u obtuso.

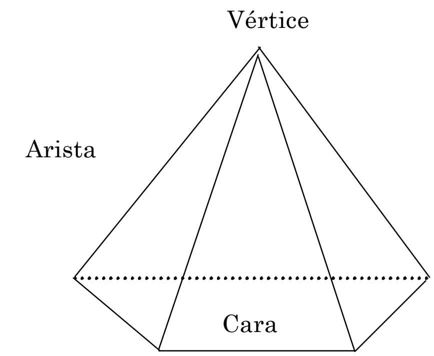
Clases de diedro

- **Diedro llano**: formado por dos semiplanos opuestos (igual a 180°).
- **Diedro cóncavo:** cuando es mayor que un llano (mayor de 180°).
- **Diedro convexo:** cuando es menor que un llano (menor de 180°).
- **Diedros consecutivos**: aquellos que tienen la misma arista, una cara en común y los puntos de cada uno son exteriores al otro.
- **Diedros adyacentes**: cuando siendo consecutivos, las caras no comunes son semiplanos opuestos.
- **Diedros opuestos por la arista:** son aquellos en los que las caras de uno son semiplanos opuestas a las caras del otro.
- **Diedros complementarios:** son los que al sumarlos originan uno recto.
- **Diedros suplementarios:** los que al sumarlos originan dos rectos.

4.2.2 Poliedros

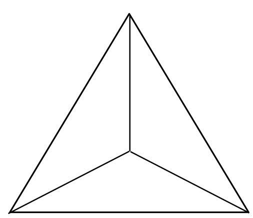
Se llama **poliedro** a un cuerpo o sólido geométrico, limitado por superficies planas.

A las superficies que limitan el sólido se le llaman **caras**, a los lados de las caras se les denominan **aristas** y las intersecciones de las aristas se identifican como **vértices**. Las diagonales de un poliedro son las rectas que une dos vértices de caras distintas.

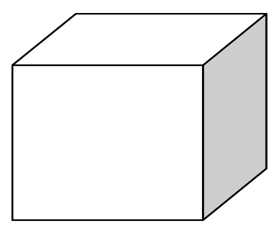


Los poliedros regulares son los que tienen como caras polígonos regulares iguales y sus ángulos poliedros también son iguales.

Existen cinco (5) tipos de poliedros que son regulares son los que tienen caras formadas por triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos.



Tetraedro



Hexaedro regular o cubo

- **Tetraedro regular:** se refiere al poliedro que está limitado por 4 triángulos equiláteros, unidos de tres en tres, con 4 ángulos poliedros. En este, los ángulos poliedros miden 1800 cada uno.

- **Hexaedro regular:** es el poliedro limitado por 6 cuadrados, unidos de tres en tres. Contiene 8 ángulos poliedros, cuyo valor es de 270° cada uno.

Los otros poliedros regulares son: octaedro, icosaedro y dodecaedro.

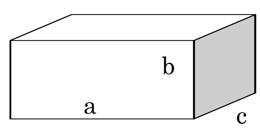
4.2.2.1 El prisma

El prisma es un poliedro, cuyas bases son dos polígonos iguales y paralelos y sus caras laterales son paralelogramos. Por su base los prismas pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales y hexagonales, entre otras.

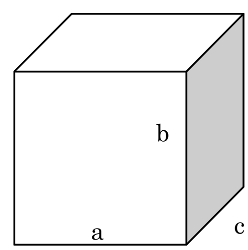
Una clase de prisma es el **paralelepípedo** cuyas bases son paralelogramos iguales, existen dos tipos:

⇨ **Recto rectángular u ortoedro:** cuando sus bases son rectángulos iguales.

⇨ **Hexaedro o cubo:** cuando sus bases son cuadradas.



Ortoedro



Hexaedro o cubo

⇨ **Area del prisma:** todo prisma tiene dos áreas, una lateral y una total.

El área lateral, se refiere a la suma de las áreas de las caras laterales, mientras que el área total comprende la suma del área lateral y el área de las bases.

⇨ **Volumen del prisma:** teniendo en cuenta que el volumen tiene que ver con la medida del espacio ocupado por el sólido, para un paralelepípedo el volumen es el producto de sus tres longitudes.

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

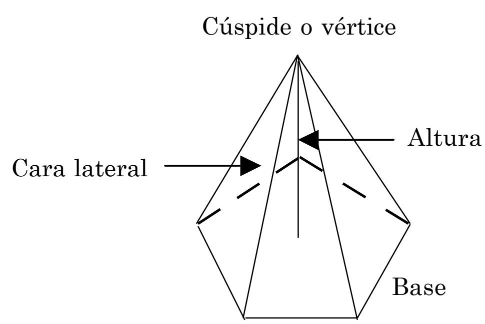
Las unidades de volumen se dan en l^3 o sea cm^3, m^3. $pies^3$, otros.

4.2.2.2 La pirámide

Es un poliedro que tiene como base un polígono y las caras laterales son triángulos que convergen en un punto. El punto donde convergen los triángulos se conoce como vértice o cúspide. La altura de la pirámide es la perpendicular trazada del vértice a la base. Las aristas laterales, son los lados que limitan las caras laterales.

La pirámide puede ser triangular, rectángular, pentagonal; según la base sea un triángulo, rectángulo, pentágono, entre otras.

También, una pirámide puede ser regular cuando tiene como base un polígono regular y el pie de la altura coincide con el centro de la base. Además las aristas laterales son iguales y por consiguiente las caras laterales son isósceles iguales. La apotema de una pirámide regular es la altura de la cara lateral.



⇨ **Area de la pirámide**: se hallan las dos áreas la lateral y la de la base.

⇨ **Lateral:** comprende el área de todos los triángulos que forman las caras laterales de la pirámide. Como se trata de triángulos, se aplica la fórmula:

$$\boxed{A = \frac{b.h}{2}}$$

- **Base**: dependiendo del tipo de polígono se aplica la fórmula respectiva.

El área total es la suma de la lateral y de la base.

- **Volumen de la pirámide:** es igual al producto de área de la base por la altura, dividido en tres.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}.B.h}$$

Donde:

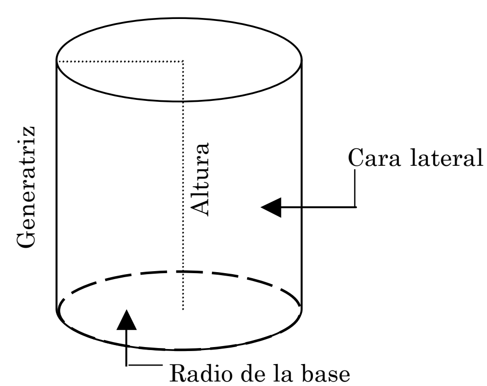
B = área de la base

h = altura de la pirámide

4.2.2.3 El cilindro

Una superficie cilíndrica es engendrada por una recta que se desplaza en el espacio, permaneciendo siempre paralela a una recta fija. La recta que gira se llama **generatriz** y la recta fija se llama directriz.

Todo cilindro tiene una superficie cilíndrica y dos planos paralelos que cortan a todas las generatrices, dichos planos se conocen como las bases del cilindro.



Area del cilindro: está conformada por el área lateral y el área de las dos bases.

Area lateral: $\boxed{A = 2\pi rg}$

Donde:

r = radio

g = generatriz

Area de las bases: $\boxed{2\pi r^2}$

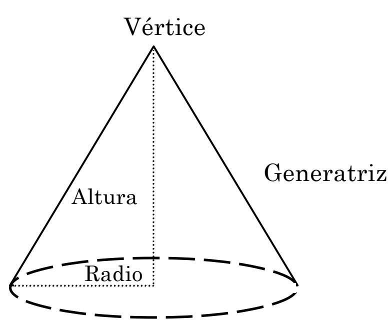
Area total: $\boxed{2\pi rg + 2\pi r^2}$

Volumen del cilindro es igual al producto del área de la base por la altura.

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

4.2.2.4 El cono

El cono de revolución o cono recto, se refiere al cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo al rededor de uno de sus catetos.



El volumen de un cono es igual al tercio de la altura, multiplicada por el área del círculo que forma la base.

$$\boxed{V = \frac{h\pi r^2}{3}}$$

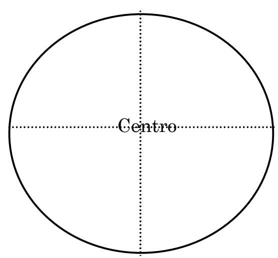
Donde:

h = Altura

r = Radio

4.2.2.5 La esfera

La esfera se obtiene cuando hay la revolución completa de una semicircunferencia alrededor de su diámetro. Por lo tanto se puede decir que una esfera es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan a un punto fijo llamado centro.



- **Area de la esfera:** es igual al producto de la circunferencia máxima por el diámetro.

$$\boxed{A = 2\pi r d}$$

Donde:

r = radio

d = diámetro

O también el área de la esfera se puede escribir en función del radio.

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

El área también se puede escribir en función del diámetro.

$$\boxed{A = \pi d^2}$$

⇨ **Volumen de la esfera:** se obtiene al multiplicar la superficie esférica por la tercera parte del radio.

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

El volumen en función del diámetro es:

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\pi d^3}$$

Autoevaluación 13

Geometría espacial

1. Calcular el área de una de las caras de un tetraedro regular, si su arista mide 6 cm.

2. La arista de un cubo mide 24 cm, hallar el volumen, el área lateral y total.

3. La pirámide grande de Egipto tiene como base un cuadrado de 232 m de lado. Sus caras laterales son triángulos equiláteros. ¿cuál será la alturade la pirámide?

4. Hallar el área y el volumen de un cilindro inscrito en un cubo que tiene 12 cm de arista.

5. El área de una esfera es de 1.256 cm^2 ¿cuál será su radio?

Autoevaluación 1

Potenciación

1. $9^{\circ} = 1$

2. $-5^{1} = -5$

3. $(-5)^{4} = 625$

4. $(-3)^{2} + (-2)^{3} = 9 + (-8) = 1$

5. $(x^{2}.x^{4})^{3} = (x^{6})^{3} = x^{18}$

6. $(y^{3}z^{4})^{5} = y^{15}z^{20}$

7. $\left(\dfrac{2^{2} * 5^{-3}}{2^{4} * 5^{-7}}\right)^{3} = \left(\dfrac{5^{-3+7}}{2^{4-2}}\right)^{3} = \left(\dfrac{5^{4}}{2^{2}}\right)^{3} = \dfrac{5^{12}}{2^{6}}$

8. $\left(3^{-2} + \left[2^{3} + 4^{2}\right] - 10^{\circ}\right) = \dfrac{1}{9} + 8 + 16 - 1 = \dfrac{1}{9} + 23 = \dfrac{208}{9}$

9. $5^{3} + \dfrac{4^{2}}{3^{-2}} - \left(-7^{-2}\right) = 125 + 16 * 9 - \left(-\dfrac{1}{49}\right) =$

   $= 125 + 144 + \dfrac{1}{49} = \dfrac{13.181}{49}$

10. $\left[\dfrac{x^{-3}y^{-4}z^{-2}}{y^{-3}z^{-4}3^{4}}\right]^{-2} = \left[\dfrac{z^{-2+4}}{81x^{3}y^{-3+4}}\right] =$

    $= \left[\dfrac{z^{2}}{81x^{3}y}\right] = \left[\dfrac{81x^{3}y}{z^{2}}\right]^{2} = \dfrac{6561x^{6}y^{2}}{z^{4}}$

Autoevaluación 2

Radicación

1. $\sqrt[3]{54^3} = 54$

2. $\sqrt[3]{0} = 0$

3. $\sqrt{5}\,.\sqrt{10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

4. $\sqrt[3]{-256} = \sqrt[3]{-8.8.4} = -2.2\sqrt[3]{4} = -4\sqrt[3]{4}$

5. $\sqrt{\dfrac{1}{25}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}} = \pm\dfrac{1}{5}$

6. $\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} + \sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}} = \dfrac{10}{5} + \dfrac{-2}{3} = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$

7. $\sqrt{-16} + \sqrt[4]{-16} =$ No tiene solución en los reales

8. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{-125}} = \dfrac{5}{-5} = -1$

9. $\sqrt[4]{x^4y^2z^6} = x^{4/4}y^{2/4}z^{6/4} = xy^{1/2}z^{3/2} = x\sqrt{yz^3} = xz\sqrt{yz}$

10. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{y^{1/2}}} = \dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{y^{1/2}}} = \dfrac{1}{y^{1/6}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{y}}$

Autoevaluación 3

Logaritmación

1. $\text{Log}_4 64 = x$ entonces: $4^x = 64$ luego: $x = 3$

2. $Log_2 32 = x$ entonces: $2^x = 32$ luego: $x = 5$

3. $Log_5 125 = x$ entonces: $5^x = 125$ luego: $x = 3$

4. $\text{Log}_3\left(\frac{1}{9}\right) = \text{x}$ entonces: $3^x = \frac{1}{9}$ luego: $x = -2$

5. $Log 20 = 1{,}3010$ (usando calculadora)

6. $Log 10 + Log 1.000 = 1 + 3 = 4$

7. $Log 50 - Log 70 = 1{,}6989 - 1{,}84509 = -\ 0{,}14619$

8. $Ln 10 = 2{,}3025$

9. $Ln 100 = 4,\ 6051$

10. $Ln 1 + Ln\ (1/2) = 0 + (-0{,}6931) = -0,\ 6931$

Autoevaluación 4

Números complejos

1. $i^4 = i^2 * i^2 = (-1)*(-1) = 1$

2. $i^5 = i^2 * i^2 * i = (-1)*(-1)* i = i$

3. $\sqrt{-36} = \sqrt{36} * \sqrt{-1} = 6i$

4. $\sqrt{-50} = \sqrt{25 * 2} * \sqrt{-1} = 5\sqrt{2}\ \ i$

5. $\sqrt{-98} - \sqrt{-162} = \sqrt{49 * 2} * \sqrt{-1} - \sqrt{81 * 2} * \sqrt{-1}$

$$= 7\sqrt{2}\,i - 9\sqrt{2}\,i = -2\sqrt{2}\ \ i$$

6. $\sqrt{-25} + \sqrt{-36} = 5i + 6i = 11i$

7. Para (-5 + 4i) el conjugado será: (-5 - 4i)

8. $(a + bi) + (x - yi) = (a + x) + (b - y)i$

9. $(-5i + 3) - (8 + 3i) = (3 - 8) + (-5 - 3)i = -5 - 8i$

10. $\dfrac{(3 - 8i)}{(4 + 2i)} * \dfrac{(4 - 2i)}{(4 - 2i)} = \dfrac{(12 - 6i - 32i + 16i^2)}{(16 - 8i + 8i - 4i^2)}$

$$= \frac{12 - 38i + 16(-1)}{16 - 4(-1)} = \frac{-4 - 38i}{20} = \frac{-4(1 + 38i)}{20} = \frac{-(1 + 38i)}{5}$$

11. $i*(3-i) = 3i - i^2 = 3i - (-1) = 1 + 3i$

Autoevaluación 5

Productos notables

Los ejercicios 1 al 4 se desarrollaron por el método del Binomio de Newton.

1. $(p-q)^3 = p^3 - 3p^{3-1}q + \frac{3(3-1)}{1*2}p^{3-2}q^2 - q^3$

$$= p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$$

2. $(a+3)^3 = a^3 + 3a^{3-1} * 3 + \frac{3(3-1)}{1*2}a^{3-2} * 3^2 + 3^3$

$$= a^3 + 9a^2 + 3a * 3^2 + 3^3 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27$$

3. $(5\text{x} - 3\text{y})^4 = (5\text{x})^4 - 4(5\text{x})^{4-1}(3\text{y}) + \frac{4(4-1)}{1*2}(5\text{x})^{4-2}(3\text{y})^2 -$

$$-\frac{4(4-1)(4-2)}{1*2*3}(5\text{x})^{4-3}(3\text{y})^3 + (3\text{y})^4 =$$

$$= (5\text{x})^4 - 4(5\text{x})^3(3\text{y}) + 6(5\text{x})^2(3\text{y})^2 - 4(5\text{x})(3\text{y})^3 + (3\text{y})^4$$

$$= 625\text{x}^4 - 1.500\text{x}^3\text{y} + 1350\text{x}^2\text{y}^2 - 540\text{xy}^3 + 81\text{y}^4$$

4. $\left(\left[x-2\right]-y\right)^3=\left[x-2\right]^3-3\left[x-2\right]^{3-1}y+\frac{3(3-1)}{1*2}\left[x-2\right]^{3-2}y^2-y^3$

$$=\left[x-2\right]^3-3\left[x-2\right]^2y+3\left[x-2\right]y^2-y^3$$

$$=x^3-3x^2*2+3x*2^2-2^3-3\left[x^2-4x+4\right]y+\left[3x-6\right]y^2-y^3$$

$$=x^3-6x^2+12x-8-3x^2y+12xy-12y+3xy^2-6y^2-y^3$$

$$=x^3-6x^2+12x-3x^2y+12xy-12y+3xy^2-6y^2-y^3-8$$

Los ejercicios del 5 al 8 se desarrollarón por el método del triángulo de pascal.

5. $(t-4)^3$. Los coeficientes son: 1, 3, 3,1 los exponentes de la **t** van disminuyendo uno a uno desde 3 hasta cero y los de 4 van aumentando de igual manera.

$$(t-4)^3=1t^3 4^0-3t^2 4^1+3t^1 4-1t^0 4^3$$

$$=t^3-12t^2+48t-64$$

6. $(2t+3s)^4$ Los coeficientes son 1, 4, 6, 4,1 de la misma manera que el caso anterior.

$$(2t+3s)^4=1(2t)^4(3s)^0+4(2t)^3(3s)^1+6(2t)^2(3s)^2+$$

$$+4(2t)^1(3s)^3+12(2t)^0(3s)^4$$

$$=16t^4+96t^3s+216t^2s^2+432ts^3+81s^4$$

7. $([x-1]-[y-2])^3$

$= 1\,[x-3]^3\,[y-2]^0 - 3[x-1]^2\,[y-2]^1 + 3[x-1]^1\,[y-2]^2 -$

$-1[x-1]^0\,[y-2]^3$

$= \; x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3(x^2 - 2x + 1)\;(y-2) + (x-1)$

$(y^2 - 4y + 4) - (y^3 - 3y^2\;(2) + 3y\;\;(4))$

$= x^3 + 3x^2 - 3x^2y + 3x - 6xy + 3xy^2 - 3y + 9y^2 - y^3 + 25$

8. $(x - 3y)^5$: Los coeficientes son: 1, 5, 10, 10, 5,1 entonces:

$= 1x^5\,(3y)^0 - 5x^4\,(3y)^1 + 10x^3\,(3y)^2 - 10x^2\,(3y)^3$

$+ 5x^1\,(3y)^4 - 1x^0\,(3y)^5$

$= x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$

9. $(a+2)(a+7) = a^2 + 9a + 14$

10. $(m+8)(m-8) = m^2 - 64$

11. $(m^2+4)(m^2-4) = m^4 - 16$

Autoevaluación 6

Factorización

1. $\left(c^2 - 25\right) = (c-5)(c+5)$

2. $2a^3 + 8a = 2a^3 + 2^3 a = 2a\left(a^2 + 4\right)$

3. $3m^3 - 6m^2 + 15 = 3m\left(m^2 - 2m + 5\right)$

4. $x^2 + 49$ No es factorizable

5. $27 - x^3 y^3 = (3 - xy)\left(9 + 3xy + x^2 y^2\right)$

6. $4b^2 - 4b - 24 = (b-3)(4b+8) = 4(b-3)(b+2)$

7. $y^3 - 2y^2 + y - 2 = \left(y^3 - 2y^2\right) + (y-2) = y^2(y-2)$

   $+ (y-2) = \left(y^2 + 1\right)(y-2)$

8. $a^2b^2 - 16 = (ab - 4)(ab + 4)$

9. $m^2 - 4m + 3 = (m-3)(m-1)$

10. $18a^3 - 8a = 2a\left(9a^2 - 4\right) = 2a(3a-2)(3a+2)$

Autoevaluación 7

M.C.D y M.C.M

1. $3a^2x,\ 7a^3x,\ 12b^2x^2$: factor común de coeficientes NO hay, pero de bases es x, donde el mínimo exponente es uno.

   Entonces: M.C.D. será: x

2. $16a^2b,\ 20bc^2,\ 30x^2y^2$: factor común de coeficientes es 2, de bases NO hay, por consiguiente el M.C.D. será: 2

3. $24pq^3,\ 16p^3,\ 28p^4q^2, 40qxp$: factor común de coeficientes es 4. El de bases es p con exponente mínimo 1. Entonces el M.C.D. es $4p$

4. $x^3+27,\ 2x^2-2x-24,\ x^4-x^3-6x^2$: Como son polinomios, se factorizan y se escoge el factor común, con su mínimo exponente. Entonces:

   $$x^3+27=(x+3)\left(x^2-3x+9\right)$$

   $$2x^2-2x-24=\frac{(2x)^2-2\,(2x)-48}{2}$$

   $$=\frac{(2x-8)\,(2x+6)}{2}=(2x-8)\,(x+3)$$

   $$x^4-x^3+6x^2=x^2\left(x^2+x-6\right)=x^2(x+3)\,(x-2)$$

   Como se observa, el factor común es $(x + 3)$. Luego el M.C.D. será: $(x + 3)$.

5. $3p^2 - 6p$, $3p^3 - 6p^2q - 2pq$, $p^3 - p^2 - 2p$: Factorizamos

$$3p^2 - 6p = 3p(p-2)$$

$$3p^3 - 6p^2 = 3p^2(p-2)$$

$$p^2q - 2pq = pq(p-2)$$

$$p^3 - p^2 - 2p = p\left(p^2 - q - 2\right) = p(p-2)(p+1)$$

Como vemos, el común denominador es $p(p\text{-}2)$, por consiguiente el M.C.D. será: $p(q$ - 2)

6. $2x^3 + 4x^2 - 4x + 6$, $x^3 + x^2 - x + 2$. En estos casos NO se puede factorizar, entonces se hacen las divisiones sucesivas hasta obtener el residuo cero. Veamos:

Primero simplificamos el primer polinomio:

$2x^3 + 4x^2 - 4x + 6 = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$

Luego planteamos la primera división:

$x^3 + 2x^2 - 2x + 3$ / $x^3 + x^2 - x + 2$ = cociente 1 y residuo x^2 + x + 1, la segunda división será:
$x^3 + x^2 - x + 2$ / $x^2 - x + 1$ = cociente x y residuo $2x^2 - 2x + 2$

La siguiente división:
$2x^2 - 2x + 2 = x^2 - x + 1$ / $2x^2 - 2x + 2$ = cociente $\frac{1}{2}$ y residuo 0.

Entonces: el M.C.D = $x^2 - x + 1$

Del 7 al 11, hallar el Mímino Común Múltiplo.

7. $12x^3$, $18xy^2$, $30y^3$:

Primero calculamos el M.C.M. de los coeficientes, descomponiendo dichos números así:

$12 = 2^2 * 3$, $18 = 3^2 * 2$, $30 = 5 * 3 * 2$

Entonces el M.C.M. será: $2^2 * 3^2 * 5 = 180$

Para las bases se escogen todas con su máximo exponente, indicando su producto: $x^3 * y^3$

Luego el M.C.M. será: $180x^3y^3$

8. $5a^2$, $7ab^2$, $9ax^3$, $10b^3x^2$:

Para el M.C.M. de coeficientes, los descomponemos asi:

$5 = 5 *1$, $7 = 7 *1$, $9 = 3^2$, $10 = 5 * 2$

Entonces el producto de factores comunes y no comunes es:

$5 * 7 * 3^2 * 2 = 630$

Para las bases: $a^2 * b^3 * x^3$

Luego el M.C.M. de los monomios es: $630a^2b^3x^3$

9. $x^2 + 2x,\ \ x^3 - 2x^2,\ \ x^2 - 4$

Como son polinomios, factorizamos así:

$$x^2 + 2x = x(x+2)$$

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$$

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

Ahora escogemos los factores comunes y no comunes, con su máximo exponente, cuyo producto es el M.C.M.

Luego éste será: $x^2\ (x - 2)\ (x + 2)$

10. $(a - 2)^2$, $a^2 - 4$, $(a - 2)^3$

Como el primero y último polinomio ya están en forma de factores, solo factorizamos el segundo:

$a^2 - 4 = (a + 2)\ (a - 2)$. Entonces, el M.C.M. es:

$(a + 2)\ (a - 2)^3$

11. $\mathrm{x}^3 - 9\mathrm{x} + 5\mathrm{x}^2 - 45,\ \mathrm{x}^4 + 2\mathrm{x}^3 - 15\mathrm{x}^2$

Factorizamos:

$$x^3 - 9x + 5x_2 - 45 = \left(x^3 - 9x\right) + \left(5x^2 - 45\right) =$$

$$= x\left(x^2 - 9\right) + 5\left(x^2 - 9\right)$$

$$= \left(x^2 - 9\right)(x+5) = (x+3)(x-3)(x+5)$$

$$x^4 + 2x^3 - 15x^2 = x^2\left(x^2 + 2x - 15\right) = x^2(x+5)(x-3)$$

Luego el M.C.M. es: $x^2(x+3)(x-3)(x+5)$

Autoevaluación 8

Fracciones algebraicas

1. $\frac{15a^4b^3}{3a^5z^2}=\frac{5b^3}{az^2}$ La simplificación se hizo dividiendo los coeficientes por 3 y la única base que está común tanto en el numerador como en el denominador a.

2. $\frac{17axt}{5bp}$. En este caso NO se puede simplificar, ya que los coeficientes no tienen factores comunes, tampoco hay bases que se puedan simplificar.

3. $\frac{20yz}{35zw}=\frac{4y}{7w}$. Los coeficientes se simplificaron por 5, la única base que es común tanto en el numerador como en el denominador es la z.

4. $\frac{5a^5t^3}{2t^6a^2b}=\frac{5a^3}{2t^3b}$. Para este caso los coeficientes no tienen factores común para simplificar, pero hay dos bases que si se pueden simplificar, la a y la t.

5. $\frac{3x^2+19x+20}{6x^2+17x+12}$

   Como se trata de una fracción con polinomios, primero factorizamos los polinomios del numerador y denominador, si se encuentran factores comunes, se simplifican, veamos:

$$3x^2+19x+20=\left[(3x)^2+19\,(3x)+60\right]/3=\left[(3x+15)(3x+4)\right]/3$$

Simplificando obtenemos: $(x + 5)\ (3x + 4)$

$$6x^2+17x+12=\left[(6x)^2+17\,(6x)+72\right]/6=$$

$$=\left[(6x+9)(6x+8)\right]/3*2$$

Simplificando: $(2x + 3)\ (3x + 4)$

Ahora los ubicamos en la fracción:

$$\frac{3x^2+19x+20}{6x^2+17x+12}=\frac{(x+5)(3x+4)}{(2x+3)(3x+4)}=\frac{(x+5)}{(2x+3)}$$

6. $$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{(x+y)}{(x^2+xy+y^2)}$$

Es pertinente que identifique qué casos de factorización se aplicaron, en este ejercicio.

7. $$\frac{2}{x-1-\dfrac{3}{x-\dfrac{x-3}{x+2}}}$$

Como se trata de una fracción compleja, se simplifica, comenzando por la parte más baja del denominador.

$$\frac{2}{x-1-\dfrac{3}{x-\dfrac{x-3}{x+2}}}=\frac{2}{x-1-\dfrac{3}{\dfrac{x(x+2)-(x-3)}{(x+2)}}}$$

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA- UNAD

Aplicamos el producto de extremos y medios para la parte más baja del denominador.

$$\frac{2}{x-1-\frac{3}{\frac{x(x+2)-(x-3)}{(x+2)}}}=\frac{2}{x-1-\frac{3(x+2)}{x^2+2x-x+3}}=$$

$$=\frac{2}{x-1-\frac{3x+6}{x^2+x+3}}$$

Ahora, volvemos a operar el denominador.

$$\frac{2}{\frac{(x-1)\left(x^2+x+3\right)-(3x+6)}{x^2+x+3}}=\frac{2\left(x^2+x+3\right)}{(x-1)\left(x^2+x+3\right)-(3x+6)}$$

$$=\frac{2x^3+2x+6}{x^3-x-9}$$

Trate de resolver los puntos 8, 9, 10, 11, 12 y 13. Si tiene dudas, trabaje con los compañeros de grupo y si las mismas subsisten, consulte con el tutor.

Autoevaluación 9

Razones y proporciones

1. a - b = c Antecedente es a y el consecuente es b

2. 12 - 4 = 8 Antecedente es 12 y el consecuente es 4

3. 25 - 4 = 21 Antecedente es 25 y el consecuente es 4

4. $\frac{12}{4} = \frac{3}{1}$ Antecedente es 12 y el consecuente es 4

5. $\frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ Antecedente es 20 y el consecuente es 5

6. x - 5 = 4 El valor de x es: 4 + 5 = 9

7. 38 - x = 29 El valor de x es: 38 - 29 = 9

8. $\frac{x}{5} = 10$ El valor de x es: 5 * 10 = 50

9. $\frac{84}{x} = 7$ El valor de x es: $84 \div 7 = 12$

10. $\frac{7}{2} = \frac{x}{6}$ Entonces: $x = \frac{7 * 6}{2} = 21$

11. $\frac{x}{4}=\frac{8}{2}$ Entonces: $x=\frac{4*8}{2}=16$

12. $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ Se puede expresar de las siguientes formas:

$$\frac{4}{1}=\frac{12}{3},\quad \frac{4}{12}=\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3}=\frac{4}{12}$$

13. $\frac{5}{12}=\frac{45}{108}$ Se puede expresar de las siguientes formas:

$$\frac{12}{5}=\frac{108}{45},\quad \frac{12}{108}=\frac{5}{45},\quad \frac{5}{45}=\frac{12}{108}$$

Autoevaluación 10

Reparto proporcional

1. Como se quiere repartir 26´000.000 entre 4 hijos de forma proporcional a las edades de estos, el procedimiento es el siguiente:

A. Método factor constante:

a. Se suman los valores de las edades de los hijos:
$5 + 8 + 10 + 14 = 37$

b. Se divide la cantidad a repartir en este valor:

$$26´000.000 \div 37 = 702.702,7027$$

c. Se multiplica el valor obtenido por cada uno de las edades de los hijos, así se obtiene cuanto le corresponde a cada uno.

Hijo de 5 años: 5 * 702.702,7027 = 3´513.513,514

Hijo de 8 años: 8 * 702.702,7027 = 5´621.621,622

Hijo de 10 años: 10 * 702.702,7027 = 7´027.027,027

Hijo de 14 años: 14 * 702.702,7027 = 9´837.837,838

B. Método de proporciones:

a- Se suma el valor de las edades: 5+ 8 + 10 + 14 = 37 b.s Se planea la proporción así:

Planteamos las proporciones para cada incógnita, *a,b, c* para conocer el valor correspondiente.

$$\frac{a}{5} = \frac{26´000.000}{37} \quad \text{Donde} \quad a = \frac{5 * 26´000.000}{37} =$$

3´513.513,514 Para el hijo de 5 años.

$$\frac{b}{8} = \frac{26´000.000}{37} \quad \text{Donde} \quad b = \frac{8 * 26´000.000}{37} =$$

5´621.612,622 Para el hijo de 8 años.

Complete el problema, con sus compañeros, si tiene dudas consulte a su tutor.

$315 \div 9 = 35$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{8} = \frac{c}{10} = \frac{000.000}{37}$$

2. El reparto de la cantidad es en relación inversa a las faltas realizadas. La cantidad es de $500.000 entre Jorge con 5 faltas, Alberto con 9 y Fabián con 7 faltas.

a. Se expresan los recíprocos del número de faltas: $\frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}$

b. Se multiplican los denominadores: $5 \cdot 9 \cdot 7 = 315$

c. Se divide el valor obtenido por cada una de las faltas.

Para Jorge: $315 \div 5 = 63$

Para Alberto:

Para Fabián:

d. Se suman estos cocientes: 63 + 35 + 45 = 143

e. Se plantean las proporciones para cada uno de ellos:

Para Jorge:

Donde $x = \frac{63 * 500.000}{143} = 220.279,72$

Para Alberto: $\frac{143}{35} = \frac{500.000}{y}$

Donde $y = \frac{35 * 500.000}{143} = 122.377,62$

Para Fabian: $\frac{143}{45} = \frac{500.000}{z}$

Donde $z = \frac{45 * 500.000}{143} = 157.342,65$

$$\frac{143}{63} = \frac{500.000}{x}$$

3. El reparto del total entre los tres grupos A,B,C de los \$4'600.000,oo se puede hacer por el método de factor constante o por el método de proporciones. El grupo A trabajo 19 días a razón de 7 hr / día. El grupo B; 18 días a razón de 8 hr / día. El grupo C; 21 días a razón de 6hr / día.

Método de factor constante:

a. Se determina el valor total de horas trabajadas por cada grupo.

Grupo A: 19 días x 7 hr / día = 133 horas
Grupo B: 18 días x 8 hr / día = 144 horas
Grupo C: 21 días x 6 hr / día = 126 horas.
Total de horas = 403

b. Se determina el factor constante:

$$4´600.000 \div 403 = 11.414,39$$

c. Se multiplica el factor constante por el valor del tiempo de cada grupo y así, se obtiene la cantidad que le corresponde a cada uno.

Grupo A: 133 *horas* * 11.414,39 = 1´518.113,87
Grupo B: 144 *horas* * 11.414,39 = 1´643.672,16
Grupo C: 126 *horas* * 11.414,39 = 1´438.213,14

Método de proporciones:

a- Se determina el valor total de horas trabajadas por cada grupo.

Grupo A: 19 días x 7 hr / día = 133 horas
Grupo B: 18 días x 8 hr / día = 144 horas
Grupo C: 21 días x 6 hr / día = 126 horas.
Total de horas = 403

b. Se plantea las proporciones de la siguiente manera:

$$\frac{A}{133} + \frac{B}{144} + \frac{C}{126} = \frac{4´600.000}{403}$$

c. Se hace la relación de proporciones para cada incógnita:

$$\frac{A}{133} = \frac{4´600.000}{403}$$

Donde: $A = \dfrac{133 * 4´600.000}{403} = 1´518.144,14$

$$\frac{B}{144} = \frac{4´600.000}{403}$$

Donde: $B = \dfrac{144 * 4´600.000}{403} = 1´643.672,45$

$$\frac{C}{126} = \frac{4´600.000}{403}$$

Donde: $C = \dfrac{126 * 4´600.000}{403} = 1´438.213,40$

4. Para repartir la herencia de don Fructuoso Calducho, la relación es inversa a la edad, entonces corresponde a un reparto proporcional inverso. La cantidad a repatir es de $120’000.000,oo entre Nancy de 10 años, José de 15 años, Katty de 12 años y Marlene de 25 años.

El procedimiento es el siguiente:

$45.000 \div 12 =$

a. Se plantea el recíproco de las edades:

Nancy: 1 / 10
José: 1 / 15
Katty: 1 / 12
Marlene: 1 / 25

b. Se multiplican los denominadores: $10_* 15_* 12_* 25 = 45.000$

c. Se hace la división del producto obtenido por cada denominador:

Nancy: $45.000 \div 10 = 4.500$
José:
Katty:
Marlene:

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería- UNAD

d. Se hace la suma de los cocientes obtenidos así:

4.500 + 3.000 + 3.750 + 1.800 = 13.050

e. Se plantean las proporciones:

Nancy:

$$\frac{13.050}{4.500} = \frac{120´000.000}{x} \qquad x = 41´379.310{,}34$$

Katty: $$\frac{13.050}{3.750} = \frac{120´000.000}{x} \qquad x = 34´482.758{,}62$$

Autoevaluación 11

Porcentaje

1. Como cada tornillo se vendió a $48,5 ganándole el 18%, entonces:

a. El porcentaje de ganancia se calcula:

$	%
48.5	118
x	100

$\frac{48.5}{x} = \frac{118}{100}$ Entonces x = 41.10

Significa que el costo del producto es de $41. 10.
La utilidad es la diferencia entre el precio de venta y el costo: $ 48.5 - $41.10 = $7.4

b. Como sabemos cuánto gana por cada tornillo, entonces la ganancia del total de la venta se calculará así:

1.246 . 7.4 = $9.220.4

2. Como Jimmy recibe el 12% de bonificación, si recibió $759.000 por ventas, entonces para saber cuánto vendió Jimmy se realiza lo siguiente:

a.

$	%
759000	12
x	100

$$\frac{759000}{x}=\frac{12}{100}=\$6´325.000$$

Jimmy vendió:$6´325.000,oo

b.

$	%
7.326.200	100
x	12

Jimy recibirá $879.144 por esa venta.

3. Acido ascórbico

Kg	%
1200	100
x	1.3

Entonces la cantidad de ácido ascórbico es de 15.6 kg.

Bicarbonato:

Kg	%
1200	100
x	0.045

La cantidad de bicarbonato es de 0.54 kg.

b. En la nueva formulación, debemos calcular qué tanto por ciento de cada sustancia tiene la mezcla, para luego sí saber la cantidad de las sustancias requeridas para los 650 Kg.

Los 50 Kg de la mezcla son el 100%, entonces:

Kg	%
50	100
0.24	x

El porcentaje de ácido ascórbico para la nueva mezcla es de 0.48%

Para el bicarbonato es:

Kg	%
50	100
1.35	x

El porcentaje de bicarbonato es de 2.7%.

Entonces la cantidad necesaria para preparar 650 kg de saborizante es:

Acido ascórbico:

Kg	%
650	100
x	0.48

Se necesitan 3.12 kg de ácido ascórbico.

Bicarbonato:

Kg	%
650	100
x	2.7

Se requieren 17.55 kg de bicarbonato.

Autoevaluación 12

Geometría plana

1. La gráfica debe identificar lados, ángulos, vértices y diagonales.

2. Angulos interiores = 180* (9-2) = 180*7 = 1260°

3. $\theta = \frac{180 * (14-2)}{14} = \frac{180 * 12}{14} = \frac{2160}{14} = 154.28°$

4. $\delta = \frac{11}{2}(11-3) = 44$ diagonales

5. $\delta = \frac{3}{2}(3-3) = 0$ El triángulo tiene solo tres vértices, donde todos son consecutivos entre sí.

6. Deben presentar los tres triángulos con su respectiva altura, mediana y bisectriz.

7. 2 + 3 + 4 = 9 entonces: 54/9 = 6

   Luego: 2 * 6 = 12 primer lado

   3 * 6 = 18 segundo lado

   4 * 6 = 24 tercer lado.

8. Angulo interior de un polígono regular $\frac{180}{n}*(n-2)$

Se despeja $n = \frac{-360}{\alpha - 180}$ donde α es la medida del ángulo.

24 lados

9. El área del rectángulo: $A = 5 * 10 = 50cm^2$

El área del círculo: $A = \pi(2cm)^2 = 12.567cm^2$

El área del triángulo: primero tenemos que hallar la altura.

Según la figura: $h^2 = 4 - (1.5)^2 = 13.75$

Despejando h = 3.708

Ahora si hallamos el área del triángulo:

$n = \frac{-360}{165-180}$

$$A = \frac{1}{2}(3cm * 3.708cm) = 5.56cm^2$$

El área total de la figura es:

$$50cm^2 + 12.567cm^2 + 5.56cm^2 = 68.127cm^2$$

10. La relación es 2-3, entonces: 120 / 5 = 24 es el factor constante de relación.

Ahora los lados más grandes medirá: 3 * 24 = 72, luego el largo mide: 36 cm.

Los lados más cortos medirán: 2 * 24 = 48, luego el ancho del rectángulo medirá 24 cm.

Autoevaluación 13

Geometría espacial

1. El área de una de las caras de un tetraedro es:

   $AL = \frac{B * h}{2}$ donde B es la base y h es la altura del triángulo. La altura se halla utilizando el teorema de pitágoras.

   $h^2 = 6^6 - 3^2 = 27$ El triángulo formado tiene 6cm de lado y 3 cm de la mitad de la base.

   $h = \sqrt{27} = 5.196cm$

   Ahora si hallamos el área lateral.

   $AL = \frac{6cm * 5.196cm}{2} = 15.58cm^2$ x 3 caras

2. Volumen: $V = l * l * l = 24cm * 24cm * 24cm = 13.824$ cm^3 ya que es un cubo.

   El área lateral: $AL = P * a$ donde P es el perímetro y $\boldsymbol{a}$ es la arista.

   $AL = (4 * 24)*24 = 2.304\ cm^2$

El área total: $AT = AL + 2B$ donde B es el área de la base, luego:

$AT = 2.304\ cm^2 + 2 * (24cm * 24cm) = 3.456\ cm^2$

3. Primero hallamos la altura del triángulo:

   $h^2 = 232^2 - 116^2 = 40.368\ m^2$ luego $h = 200.917\ m$

   Ahora si podemos calcular la alturade la pirámide:

   $H^2 = (220.917)^2 - (116)^2 = 26.911,64\ m^2$

   $H = 164,047\ m$ corresponde a la altura de la pirámide.

4. Como el cubo tiene 12 cm de arista, este corresponde a la longitud del cilindro. Entonces la generatriz vale 12 cm y el radio 6 cm.

   $AL = 2\pi r * g = 2\pi * 6cm * 12cm = 452,16m^2$

   $B = \pi r^2 = \pi * (6cm)^2 = 113,09cm^2$ área de la base.

   Ahora podemos hallar el área total:

   $AT = AL + 2B = 452,16cm^2 + 2(113,09cm^2) = 678,24cm^2$

   Por otro lado el volumen se calcula así:

   $V = B * h = 113,09cm^2 * 12cm = 1.357,08cm^2$

5. El área de una esfera es: $A = 4\pi r^2$ despejamos r:

   $$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{\frac{1256cm^2}{4\pi}} = 9,997cm$$

BIBLIOGRAFIA

Algebra / Aurelio Baldor. Medellín: Litoprimas, 1983.

Algebra y trigonometría / Barnett- Uribe. Mac Graw Hill, 1989.

Introducción a la matemática moderna /Elbridge Vance, México.

Educativo Interamericano. 1978.

Lecciones de algebra y trigonometría /Juan A Viedma. Cali. Norma 1967.

Matemática 4: Algebra y Geometría / Edgar Obonaga, Jorge Pérez, Víctor Caro. Bogotá: PIME, 1984 Serie Matemáticas moderna, Algebra / Richard Johnson, Lona Lendsey, William Slesnick.: Norma 1972.

Teoría de Conjuntos y temas afines /Seymour Lipschutz. Cali: Mac Graw Hill, 1978